名古屋市立大学経済学会

オイコノミカ

第 46 巻　第３号

日本の景気局面の継続性：generalized Weibullモデルの応用

三　井　　　　栄

平　成　22　年　2　月　1　日 発　行

オイコノミカ　第46巻　第３号，2010年，pp.51-58

日本の景気局面の継続性：generalized Weibullモデルの応用

三　井　　　栄

1．はじめに

アメリカでは景気循環の拡張局面と後退局面が終わる確率と時間の経過との関連性（duration dependence）について様々な議論がされている．Sichel（1991）は「ハザード関数」と呼ばれる，前期$t-1$時点までに景気の山（谷）が訪れなかった場合に今期t時点に山（谷）が訪れる事前確率分布の推計を行っている．NBER（the National Bureau of Economic Research）が公表している1954年から1990年の継続期間のデータを用いたWeibullハザード関数では，戦前の拡張局面と戦後の後退局面において時間の経過に伴いその局面の終了確率が高まる傾向がみられる（positive duration dependence）．Diebold, Rudebusch, and Sichel（1993）では，ハザード関数にWeibull関数を含む複数の関数を適用し，景気局面の継続性に関する実証分析を行っている．Zuehlke（2003）ではハザード関数にWeibull関数を一般化した非線型関数generalized Weibullモデルを設定することにより，戦後の拡張局面においても時間の経過に伴い終了確率が高まることを示している．

また，Cochran and Defina（1995）は1885年から1992年の株式市場の循環を対象に，Weibullハザード関数の推計を行っており，戦前の拡張局面と戦後の後退局面において時間の経過に伴いその局面の終了確率が高まることを示した．Harman and Zuehlke（2007）ではgeneralized Weibullハザード関数を適用することにより，株式市場の循環では，時間の経過に伴い，戦前，戦後の拡張局面，拡張局面のすべてで終了確率が高まることを示し，Weibullハザード関数に比較してより適用性が高く，株価の予測に有用であることを実証している．さらに，Payne and Zuehlke（2006）では，不動産投資信託指数（Real Estate Investment Trusts Index）の循環についてもWeibullハザード関数とgeneralized Weibullハザード関数を用いた分析を行い，局面の終了確率と時間との関連性について良好な結果を示している．

日本の景気循環については，松岡（1998）で戦後1951年から1998年のデータを用いてWeibullハザード関数を推計しており，Sichel（1991）の分析結果との比較を行っているが，日本では拡張と後退のいずれの局面においても時間の経過に伴いその局面の終了確率が高まる傾向はみられなかった（no duration dependence）．また，三井（2008）でも2008年までのデータを加えWeibullハザード関数を推計しているが，後退局面のパラメータは改善されたものの継続性については松

岡（1998）と同様の結果であった．

そこで本稿では日本の景気局面の継続性について考察するため，Zuehlke（2003）と同様にgeneralized Weibullモデルを用いてハザード関数の推計を試行し，Weibullモデルとの比較分析を行う．

２．事前確率分布の設定

サバイバル関数とはある状態（拡張局面または後退局面）が t 期継続している確率を示し，Weibullモデルでは以下のとおり定義する．

$$S(t) = \exp(-\alpha \cdot t^{\beta+1}) \tag{1}$$

$\alpha > 0$，$\beta > -1$，$t > 0$ である．このとき，ハザード関数は

$$h(t) = \alpha(\beta+1) \cdot t^{\beta} \tag{2}$$

となり，対数をとると

$$\log[h(t)] = \log(\alpha(\beta+1)) + \beta \log(t) \tag{3}$$

と表せる．継続期間を決定するパラメータは β であり，

$\beta > 0$ のとき　ハザード関数は単調増加関数
$\beta < 0$ のとき　ハザード関数は単調減少関数
$\beta = 0$ のとき　ハザード関数は定数

となる．

一方，Mudholkar, Srivastava, and Kollia（1996）ではパラメータを追加することにより，ハザード関数が単調増加もしくは単調減少以外の形状をとりうる非線型関数generalized Weibullモデル（以下，Mudholkarモデル）を提示している．Mudholkarモデルではサバイバル関数を次式のとおり定義する．

$$S(t) = \left[1 - \lambda\alpha \cdot t^{(\beta+1)}\right]^{\lambda^{-1}} \tag{4}$$

$\alpha > 0$，$\beta > -1$，$\lambda \le 0$ のとき $0 < t < \infty$，$\lambda > 0$ のとき $0 < t < (\alpha\lambda)^{-(1/\beta)}$ である．このとき，ハザード関数は

$$h(t) = \alpha(\beta+1) \cdot t^{\beta}\left[S(t)\right]^{-\lambda} \tag{5}$$

となり，対数をとると

$$\log[h(t)] = \log[\alpha(\beta+1)] + \beta\log(t) - \lambda\log[S(t)] \tag{6}$$

と表せる．また，対数尤度関数は以下のように表せる．

$$\log L(\{t_i\}_{i=1}^{n};\alpha,\beta,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\{J_i \log[f(t_i)] + (1-J_i)\log[1-F(t_i)]\} \tag{7}$$

ただし，t_i は観測値（継続期間），J_i はダミー変数（局面が終了していれば１，継続していれば０），$f(t)$ と $F(t)$ はそれぞれ密度関数と分布関数である．次に，短すぎる景気循環は認識されないので，景気循環の期間を調整する必要がある．そこで，Sichel（1991）と同様に拡張局面および後退局面の最も短い継続期間 t_0 を基準とするように，対数尤度関数を

$$\log L(\{t_i\}_{i=1}^{n};\alpha,\beta,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\left\{J_i \log\left[\frac{f(t_i)}{1-F(t_0)}\right] + (1-J_i)\log\left[\frac{1-F(t_i)}{1-F(t_0)}\right]\right\} \tag{8}$$

と置き換える．最後に，密度関数と分布関数をハザード関数とサバイバル関数で置き換えると，対数尤度関数は以下のとおりになる．

$$\log L(\{t_i\}_{i=1}^{n};\alpha,\beta,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\{J_i \log[h(t_i)] + \log[S(t_i)] - \log[S(t_0)]\} \tag{9}$$

ただし，$S(\cdot)$ と $h(\cdot)$ はWeibullモデルでは(1)式と(2)式，Mudholkarモデルでは(4)式と(5)式である．

３．景気局面の継続性：事前確率分布の推計

事前確率分布を推計するため，WeibullモデルとMudholkarモデルについて対数尤度関数を(10)式と(11)式にそれぞれ示す．

$$\log L(\{t_i\}_{i=1}^{n};\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\{\log\alpha(\beta+1) + \beta\log(t_i) - \alpha(t_i^{\beta+1} - t_0^{\beta+1})\} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\log L(\{t_i\}_{i=1}^{n};\alpha,\beta,\lambda) &= \sum_{i=1}^{n}\{\log\alpha(\beta+1) + \beta\log(t_i) - \log(1-\lambda\alpha\cdot t_i^{(\beta+1)})\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\{(1/\lambda)[\log(1-\lambda\alpha\cdot t_i^{(\beta+1)}) - \log(1-\lambda\alpha\cdot t_0^{(\beta+1)})]\}\end{aligned} \tag{11}$$

内閣府が公表している日本の継続期間（表１）を用いて，(10)式についてαとβ，(11)式についてαとβとλを最尤法により推計を行い，その結果を表２に示した．ただし，t_i は拡張局面および後退局面の継続期間数であり，t_0 は（最も短い継続期間－１），すなわち拡張局面は

$t_0 = 22 - 1 = 21$，後退局面は$t_0 = 4 - 1 = 3$である[1)]．

表１　日本の景気基準日付と継続期間（月数）

山	谷	拡張局面	後退局面
51年6月	51年10月		4
54年1月	54年11月	27	10
57年6月	58年6月	31	12
61年12月	62年10月	42	10
64年10月	65年10月	24	12
70年7月	71年12月	57	17
73年11月	75年3月	23	16
77年1月	77年10月	22	9
80年2月	83年2月	28	36
85年6月	86年11月	28	17
91年2月	93年10月	51	32
97年5月	99年1月	43	20
00年11月	02年1月	22	14
平均継続期間		33.2	17.1

資料）内閣府

表２で示したWeibull関数のパラメータβは拡張局面で0.03197，後退局面で0.81668となった[2)]．松岡（1998）とは算出方法が多少異なるが，1951～1998年までのデータを用いた推定結果の拡張局面0.093と後退局面0.456と同様に，いずれの局面においても$\beta = 0$の帰無仮説は棄却できず，時間の経過とその局面が終わる確率との間には関連性が見られない（no duration dependence）という結果となった．ただし，図１－１と１－２に示した各局面のハザード関数の形状からわかるように，後退局面の方が拡張局面よりも時間の経過に伴い，その局面が終わる確率は高まる傾向がみられる．

表２　日本の景気局面の継続性に関する推計結果

		Weibullモデル			Mudholkarモデル		
		MLE	*SE*	*p value*	*MLE*	*SE*	*p value*
拡張局面	α	0.07134	0.57596	0.901	0.00032	0.00178	0.859
	β	0.03197	1.8992	0.987	0.99031	1.53469	0.519
	λ				1.00888	0.41643	0.015
後退局面	α	0.00553	0.01071	0.605	0.00012	0.00024	0.623
	β	0.81668	0.5934	0.169	1.51791	0.707921	0.032
	λ				1.00726	0.340441	0.003

１）t_0についてはSichel（1991）のp.256を参照した．また，詳細はAbraham and Farber（1987）p.285参照．

２）Zuehlke（2003）の結果との比較を行うため，三井（2008）のαとβ，松岡（1998）のαとγを本稿ではそれぞれβ+1とαとおいている．

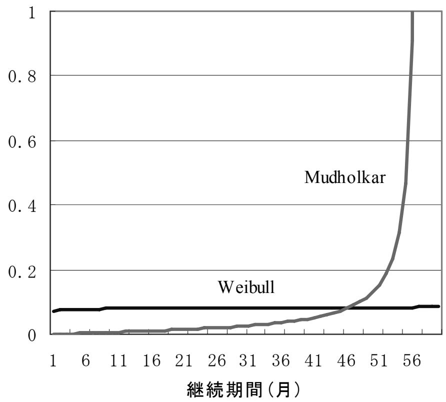

図１－１　日本の拡張局面のハザード関数

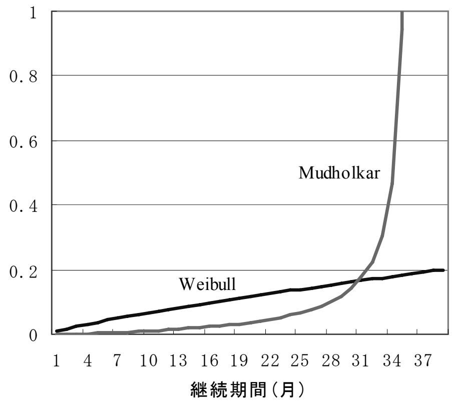

図１－２　日本の後退局面のハザード関数

次に，Mudholkarモデルのパラメータについて考察を行う．拡張局面においてはβの水準は上昇したものの$\beta＝０$の帰無仮説は棄却できないが，有意水準５％で$\lambda＞０$が成立するため，継続期間が長くなればハザード関数は正の弾力性をもつことが示された．図１－１からもわかるように，46ヶ月を経過するあたりでWeibullモデルの水準に追いつき，その後急速に局面が終わる確率が上昇している．

一方，後退局面においては，$\beta＝０$の帰無仮設は棄却され，$\beta＞０$が有意となり，時間の経過に伴いその局面が終わる確率が高まる傾向（positive duration dependence）が示された．また，有意水準５％で$\lambda＞０$が成立するため，ハザード関数に非線型モデルを仮定することにより，継続性を測る指標としての役割が改善された．

Iiboshi（2008）ではマルコフスイッチングモデルの推移確率をWeibullモデルにより景気循環の継続期間に依存するように拡張し，日本の景気動向指数一致指数を用いた結果，拡張局面，後退局面ともに，推移確率は継続期間に依存していることを示している．また，日本の景気局面の継続確率（生存確率）が10％より低くなる継続期間を，拡張局面では45ヶ月，後退局面では25ヶ月と算出している．

本稿におけるMudholkarモデルでは図表１－１と図表１－２に示したとおり，ハザード関数の水準が90％以上（＝生存確率が10％以下）となる期間は拡張局面では56ヶ月，後退局面では35ヶ月である（$\lambda＞０$におけるtの上限$(\alpha\lambda)^{-(1/\beta)}$はそれぞれ57ヶ月，36ヶ月である）．生存確率が10％より低くなる継続期間はIiboshi（2008）の算出結果よりも約10ヶ月長いという結果になったが，Mudholkarモデルでは拡張局面と後退局面はハザード関数の水準が10％を超える期間はそれぞれ46ヶ月，26ヶ月で，その後急速に各局面の終了確率が上昇するという特徴を持っている．

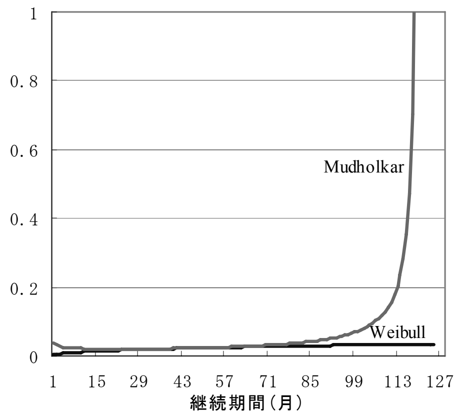

図２－１　米国の拡張局面のハザード関数

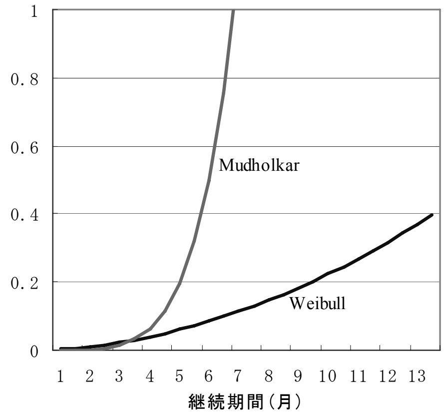

図２－２　米国の後退局面のハザード関数

次にアメリカの景気局面の継続性との比較を行うため，Zuehlke（2003）の戦後1945年から2001年までの分析結果を引用する．拡張局面についてはWeibullモデルのパラメータ β は0.44887となり，$\beta=0$ の帰無仮説は棄却できず，時間の経過とその局面が終わる確率との間には関連性が見られない（no duration dependence）．また，Mudholkarモデルの β は−0.31172で同じく $\beta=0$ の帰無仮説は棄却できないが，λ は0.71290で $\lambda>0$ は５％水準で有意となったため，継続期間が長くなるときハザード関数は正の弾力性をもつことが示された．しかし，図２－１に示したとおり，ハザード関数の水準が上昇し始めるのは70ヶ月を超えてからとなり，10％以上になる期間は100ヶ月経過後であるため，拡張局面が終わりを迎える時期の予測には適していないと考えられる．

アメリカの後退局面についてはWeibullモデルのパラメータ β は1.90088となり，Sichel（1991）のWeibullモデルの結果と同じく，$\beta>0$ が有意となり，時間の経過に伴いその局面が終わる確率が高まる傾向（positive duration dependence）が示された．図２－２からわかるように，10ヶ月経過した時点でハザード関数の水準は20％を超し，徐々に上昇している．同様に，Mudholkarモデルの β は5.02094で $\beta=0$ の帰無仮説は棄却されたが，λ は0.04810で $\lambda=0$ の帰無仮説（ハザード関数は線型となる）は棄却できないため，ハザード関数にMudholkarモデルを仮定し，非線型へ拡張することによる改善はみられない．とはいえ，図２－２に示したMudholkarモデルでは非常に短い継続期間でハザード関数の水準が上昇している．

以上のことより，アメリカでは拡張局面ではMudholkarモデルを用いることにより，ハザード関数は t が大きくなれば正の弾力性をもつが，その水準が十分に上昇するにはかなりの時間を要する．一方，後退局面ではWeibullモデルの場合においても継続期間と局面が終わる確率との関連性が見られている．その要因としてアメリカの拡張局面と後退局面の分布は大きく異なることが挙げられ，日本の拡張局面の平均が33.2ヶ月に対し，アメリカでは56.9ヶ月となっており，戦

後の10循環のうち３循環が92ヶ月，102ヶ月，120ヶ月と継続期間が100ヶ月前後に長期化している．逆に，後退局面は日本の平均が17.1ヶ月に対し，アメリカでは10.7ヶ月であり，戦後の10循環のうち10ヶ月未満が４循環，10ヶ月，11ヶ月が各２循環，16ヶ月が２循環と短期化している．また，Zuehlke（2003）が指摘しているように，戦後のデータは10循環分に限られているため，今後使用できるデータが増加すれば，パフォーマンスがより改善される可能性が高い．

４　まとめと今後の課題

本章では，ハザード関数にMudholkarモデルを適用し，日本の景気局面の継続性について分析を行った．主な結果は以下２点である．

①　景気拡張局面ではMudholkarモデルはWeibullモデルと同様に$\beta=0$の帰無仮説は棄却できないが，有意水準５％で$\lambda>0$が成立するため，継続期間が長くなればハザード関数は正の弾力性をもつこと（positive duration dependence）が示された．

②　景気後退局面ではWeibullモデルでは$\beta=0$の帰無仮説は棄却できないが，Mudholkarモデルは有意水準５％で$\beta>0$および$\lambda>0$が成立するため，継続期間が長くなればハザード関数は正の弾力性をもつこと（positive duration dependence）が示された．

本稿で用いたWeibullモデル一般化した非線型Mudholkarモデルをハザード関数として設定した上で，Neftci（1982）のSequential Probability Recursion（SPR）へ応用するなど，景気転換点の予測のパフォーマンスを比較する必要がある．

さらに，Zhou and Rigdon（2008）では戦前，戦後などの情勢変化に応じてハザード関数が異なるmodulated power law process（MPLP）を設定しアメリカの景気循環について実証分析を行っており，良好な結果を示している．日本の景気循環への応用も今後の課題である．

参考文献

松岡幹裕，“景気の転換点の予測，”『シミュレーション』第17巻，第４号，1998年，pp.3-13.

三井　栄，“改良型Neftci Modelによる景気転換点の予測と地域経済への応用”，『第45回日本地域学会全国大会発表論文集』2008年（『地域学研究』 印刷中）.

Abraham, K. G. and H. S. Farber, “Job duration, seniority, and earnings”, *American Economic Review*, 77, 1987, pp. 278-297.

Cochran, S. J., and R. H. Defina, “Duration Dependence in the US Stock Market Cycle: A parametric Approach,” *Applied Financial Economics*, 5, 1995, pp.309-318.

Diebold, F.X., Rudebusch, G.D., and Sichel, D.E., “Further evidence on business-cycle duration dependence”, *Business Cycles, Indicators and Forecasting*, Stock, J.H., Watson, M.W. (Eds.), University of Chicago Press, Chicago, 1993, pp.255–284..

Harman, Y.S. and T.W. Zuehlke, “Nonlinear duration dependence in stock market cycles,” *Review of Financial Economics*, 16, 2007, pp.350–362.

Iiboshi, Hirokuni, ”Duration Dependence of the Business Cycle in Japan: Bayesian Analysis of Extended Markov Switching Model,” *Japan and the World Economy*, Vol. 19, 2007, pp.86-111.

Mudholkar, G. S., D. K Srivastava., and G. D. Kollia, “A Generalization of the Weibull Distribution With Application to the Analysis of Survival Data,” *Journal of the American Statistical Association*, 91, 1996, pp. 1575-1583.

Neftci S.N, “Optimal Prediction of Cyclical Downturns”, *Journal of Economics Dynamics and Control*, 4, 1982, pp.225-241.

Payne, J. E. and Zuehlke, T. W., “Duration Dependence in Real Estate Investment Trusts”, *Applied Financial Economics*, 5, 2006, pp.413-423.

Sichel, D. E, “Business cycle Duration Dependence: A Parametric Approach,” *Review of Economics and Statistics*, 71, 1991, pp. 254-260.

Zhou, H. and Rigdon, S. E., “Duration Dependence in US Business Cycles : An Analysis Using the Modulated Power Law Process”, *Journal of Economics and Finance*, 32, 2008, pp.25-34.

Zuehlke, T. W., “Business cycle duration dependence reconsidered”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 21, 2003, pp. 64−569.

（2009年11月24日受領）

平成22年２月１日発行

編集者　名古屋市立大学経済学会

名古屋市瑞穂区瑞穂町字山の畑１

印刷所　㈱正鵠堂