多目的0-1計画問題に対する遺伝的アルゴリズムに基づくファジィ意思決定手法とマーケティング問題への応用

矢野　均

1．はじめに

割当問題、配置問題、輸送問題等、数多くの現実の意思決定問題は、整数計画問題としてモデル化できる。このような古典的な整数計画法の研究はもちろん、最近では、価値観の多様化に対応して、複数の互いに相競合する目的関数をバランスよく最適化するという多目的意思決定の立場から、多目的整数計画法［11］の研究や、意思決定の際に本質的に含まれるであろう人間の主観的判断のあいまい性に対処しようとするファジー理論の立場から、ファジー整数計画法［4］,［5］,［6］に関する研究が、精力的に行われている。しかし、現時点では、一般的に、大規模な整数計画問題を直接解くことは、数値計算上困難であり、このような整数計画問題を効率的に解くための最適化手法が強く望まれている。

一方、近年、自然界のシステムにおける生物の進化のメカニズムを模擬するアルゴリズムとして、遺伝的アルゴリズムが提唱され、その組合せ最適化問題への応用に関する研究が活発におこなわれてきている［7］,［8］,［9］,［10］。遺伝的アルゴリズムを最適化問題に適用する際の大きな問題点は、制約条件の取り扱いである。即ち、ある世代の個体群がすべて実行可能であっても、遺伝的オペレータ適用後に新たに生成される次世代の個体群が実行可能である保証はない。そこで、遺伝的アルゴリズムを適用して制約条件付き最適化問題を解くために、以下のような方法が提案されてきた。

(1) 制約式を破る個体に対しては、適応度関数に対して適当なペナルティを課す。
(2) 対象とする最適化問題特有の性質を利用して、制約条件を常に満たすような特別な遺伝的オペレータを設計する［7］。
(3) 制約条件を破る個体に対しては、その構成要素の1部を強制的に修正する［8］,［9］。
(4) 遺伝的オペレータを適用する空間（GA空間）上の個体群を、直接変数値として使用する代わりに、それらを適当な写像によって決定変数空間に置き換えることにより、制約条件を常に満たすようにする［1］。

1番目の、適応度関数にペナルティを課す方法は、単純でどのような場合にも適用できるため広く採用されているが、通常の最適化問題に対するペナルティ関数法と同様、一般に収束が遅く、なかなか最適解に到達しないという問題点がある。2番目の、最適化問題特有の性質を利用する方法としては、連続変数の線形制約条件式をもつ最適化問題に対して、制約領域の凸性をうまく利用して設計された遺伝的オペレータが提案されているが、本稿で対象とする整数計画問題に対しては、残念ながら適用できない。さらに、3番目の方法としては、坂和ら［8］,［9］により提案された、0-1整数計画問題に対する改良型遺伝的アルゴリズムがあげられる。このアルゴ

リズムでは、変数の値の列とその添え字の列を二段に並べた二重構造のストリングに対して適当な交叉オペレータを定義し、オペレータ適用後に生成された個体が制約条件を破った場合のみ、一部の構成要素（変数）を強制的に1から0に置き換えて常に実行可能となるように工夫されている。しかし、ここでは、ナップサック問題、集合被覆問題、集合分割問題のように、線形制約式の係数がすべて正であることを前提としている。4番目は、J. C. Bean [1] により提案されたランダムキーによる方法で、変数の構成要素の次数 n に対応するランダムキー空間 $[0,\ 1]^n$ 上で生成された個体群に対して、遺伝的オペレータを適用し、生成されたランダムキーの構成要素の大小順から、変数の順番を決定、その順番に従って、各要素を順次1に固定してゆき、制約条件を満たさなくなった段階でそれ以降の要素をすべて0に設定する。しかし、この方法でも、3番目の方法と同様に、線形制約不等式の係数はすべて正であることを前提としている。また、変数の要素数とその個体群サイズに対応する実数変数の配列が必要となり、対象とする問題の変数の個数と個体群サイズに依存して莫大な記憶容量が必要となるという、数値計算上の問題点がある。

このような状況において、本論文では、制約式は線形不等式であるがその係数の符号は任意であるような0-1整数計画問題を対象として、遺伝的アルゴリズムに基づく最適化アルゴリズムを提案する。また、提案したアルゴリズムをファジー環境における多目的0-1計画問題に組み込み、遺伝的アルゴリズムに基づく意思決定手法を提案する。さらに、具体例として、多目的0-1計画問題として定式化され、その制約式の係数が正、負ともに混在しているような広告媒体選択問題 [12] に適用し、提案した手法の有効性を検討する。

2. ファジー多目的0-1計画問題

本論文では、以下のような多目的0-1計画問題について考察する。

$$\left.\begin{aligned} &\text{minimize}\ \ (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)) \\ &\text{subject to}\ \ Ax \leqq b \\ &\qquad\qquad x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, \cdots, n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで、$f_i(x), i = 1, \cdots, k$ は、k 個の相競合する目的関数で任意の実数値関数、制約式はすべて線形関数で、$A = (a_{ij})$ は $(m \times n)$ 次実数値行列、$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ の m 次実数値ベクトルであり、各構成要素は任意の符号をもつものとする。

本論文では、意思決定者は、各目的関数 $f_i(x)$ に対してあいまいな目標（ファジー目標）を持ち、主観的に彼のファジー目標をメンバシップ関数 $\mu_i(f_i(x))$ により規定することができるものと仮定する。この時、もとの問題(1)は、次のような各メンバシップ関数を最大化するファジー多目的0-1計画問題に変換される。

$$\left.\begin{aligned} &\text{maximize}\ \ (\mu_1(f_1(x)), \cdots, \mu_k(f_k(x))) \\ &\text{subject to}\ \ Ax \leqq b \\ &\qquad\qquad x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, \cdots, n \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

さらに、本論文では、意思決定者は、これらのメンバシップ関数を統合するオペレータとしてファジー決定 [2] を採用するものと仮定する。この時、ファジー多目的0-1計画問題は、以下のような通常の0-1計画問題に帰着できる。

$$\left.\begin{array}{l} \text{maximize} \quad \min_{i=1,\cdots,k} \{\mu_i(f_i(x))\} \\ \text{subject to } Ax \leqq b \\ \qquad\qquad x_j \in \{0,1\},\ j=1,\cdots,n \end{array}\right\} \quad (3)$$

ここで、制約式の係数が任意の符号であるため、制約式の係数が正であることを前提にしている坂和らの2重構造のストリングによる改良型遺伝的アルゴリズム［8］,［9］や、Bean［1］のランダムキーによる方法は、直接適用することはできないことに注意しよう。例えば、右辺定数が負の場合や、たとえ正であっても1番目に選ばれた構成要素の係数の値よりも小さい場合などは、個体が実行可能であるにも関わらず、1番目に選ばれた構成要素を1にしても0にしても実行不可能となってしまう。以下では、このような0-1計画問題に対しても対処しうる遺伝的アルゴリズムを提案する。

3．遺伝的アルゴリズム

0-1整数計画問題(3)に対してGoldberg［3］により提案された単純GA(SGA)を適用した場合、交叉・突然変異により生じた個体は、制約条件を満たさない可能性が高い。そこで、このような制約条件付き最適化問題に対して遺伝的アルゴリズムを適用する場合、しばしば、制約条件を破れば対応する目的関数にペナルティを課す（ここでは、ゼロに置き換える）ことによって、次のような適応度関数$F(x)$が採用されている。

$$F(x) = \min\left\{\left(\min_{i=1,\cdots,k} \mu_i(f_i(x))\right), \chi c(x)\right\} \tag{4}$$

ここで、$\chi c(x)$は、xが(3)の制約条件を満たせば1、そうでない場合には0をとるペナルティ関数である。

しかし、このようなペナルティ関数を含む適応度関数に対しては、制約条件が非常に厳しい問題の場合、生成した個体のほとんどが適応度ゼロになってしまい、効率的な最適解の探索は期待できない。

このような問題点に対処するため、本論文では、(3)の制約式の係数行列A、係数ベクトルbの各要素の符号が任意であるような最適化問題(3)に対して、SGAに基づくアルゴリズムを提案する。その前に、まず、SGAの基本アルゴリズムを以下に示す。このアルゴリズムにおいて、目的関数にペナルティ項を付け加えた式(4)を適応度関数として採用している。

[SGAの基本アルゴリズム]

ステップ1　解空間を、変数の次数nに対応してn個の要素からなる0-1アルファベットのストリングに符号化する。

ステップ2　0-1アルファベットのストリングを設定した個数（個体群サイズ: *pop_size*）だけランダムに発生させて、初期個体群を生成する。初期世代$t=1$と設定する。

ステップ3　各ストリングに対して、適応度関数の値を計算する。$i=0$とする。

ステップ4　選択オペレータを用いて、個体群の中から適応度関数の値に応じて、2つのストリングを選択する。

ステップ5　選ばれたストリングのペアに対して、確率p_cで交叉オペレータを適用する。

ステップ6　選ばれたストリングのペアに対して、確率p_mで突然変異オペレータを適用する。

ステップ7　$i=i+2$として、もし、$i \geqq pop_size$ならば、新たに生成された個体

群を旧個体群と入れ替えて、世代 $t=t+1$ として次のステップへいく。そうでなければ、ステップ4へもどる。

ステップ8　世代 $t<T$（最終世代）ならばステップ3へもどる。そうでなければ、次のステップへいく。

ステップ9　最終世代 T までの集団の中で最大適応度をもつストリングを、もとの解空間にデコード化してそれを近似最適解とする。

厳しい制約条件を有する最適化問題に対して、この遺伝的アルゴリズムを適用した場合、生成される個体群のほとんどすべてがゼロとなってしまい、解の改善が進まない可能性がある。そこで、本稿では、制約条件を破る個体に対して、係数の符号情報と構成要素の値の情報をもとにして、ランダムな順序で各制約式を満たすように0，1をいれかえるという、ランダム0-1反転法を提案する。すなわち、生成された各個体に対して、少なくとも1つの制約条件を満たさないものがある場合、以下の処理を行う。

[ランダム0-1反転法]

ステップ1　実行可能でない制約式（m_u 個とする）に対して、ランダムに順位付けを行い、それらの添字集合を $\{c_1, c_2, \cdots, c_{m_u}\}$ とおく。

ステップ2　$j=1$ とおく。

ステップ3　決定変数の添字集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ をランダムに並び替え、それらを、$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ とおく。$j>m_u$ ならば、終了する。

ステップ4　$i=1$ とおく。

ステップ5　もし、$x_{d_i}=1$ かつ $a_{d_i c_j}>0$ ならば、$x_{d_i}=0$ とする。

ステップ6　もし、$x_{d_i}=0$ かつ $a_{d_i c_j}<0$ ならば、$x_{d_i}=1$ とする。

ステップ7　j 番目の制約式 $\Sigma_{i=1}^{n} a_{d_i c_j} x_{d_i} \leqq b_{c_j}$ を満たす場合、あるいは、$i=n$ の場合には $j=j+1$ として、ステップ3へ戻る。そうでなければ、$i=i+1$ として、ステップ5へ戻る。

このアルゴリズムをSGAの基本アルゴリズムのステップ3に組み込むことにより、修正された遺伝的アルゴリズムを構成することができる。すなわち、SGAのステップ3を次のステップ3'に置き換える。

ステップ3'　各ストリングに対して、ランダム0-1反転法を適用し、適応度関数の値を計算する。$i=0$ とする。

この修正された遺伝的アルゴリズムにおいて、たとえステップ3'でランダム0-1反転法を適用しても必ず実行可能解が得られるという保証はないので、ステップ3'の適応度関数はペナルティ項を付け加えた(4)式で定義していることに注意しよう。

4．広告媒体選択問題への応用

この節では、提案したアルゴリズムの有効性を検討するために、Wiedey and Zimmermann [12] により定式化された広告媒体選択問題に適用し検討を加える。

この問題は、ある地域に限定されたマーケットに対して新製品投入に際して効果的な広告キャンペーンを行うために、限られた予算の中で各種広告媒体（全国版新聞、地方版新聞、週刊誌、ジャーナル）をどのように選択するべきかという意思決定問題を、多目的0-1計画問題として定式化したものである。目的関数としては、累積到達率（広告を少なくとも一回は視た視聴者の割合で広告の広がりを表

す指標)、延べ到達率、視聴の深さを測る指標の3目標を取り上げて、各目標に対して意思決定者が主観的に彼のファジー目標を線形メンバシップ関数により規定するものとする。また、決定変数としては、ある期間、ある広告媒体を、何本購入するかを、0-1変数により表現し、結局、以下のような19制約式30変数により構成されるファジィ多目的0-1計画問題として定式化した。

$$\begin{aligned}\max\ \mu_1(f_1(x)) = ((&0.1x_1+0.3x_2+0.6x_3\\&+0.9x_4+1.2x_5+0.067x_6+0.2x_7\\&+0.4x_8+0.6x_9+0.8x_{10}+0.083x_{11}\\&+0.25x_{12}+0.5x_{13}+0.075x_{14}+0.225x_{15}\\&+0.083x_{16}+0.25x_{17}+0.5x_{18}+0.75x_{19}\\&+1.x_{20}+0.067x_{21}+0.2x_{22}+0.4x_{23}\\&+0.6x_{24}+0.8x_{25}+0.067x_{26}+0.2x_{27}\\&+0.4x_{28}+0.075x_{29}+0.225x_{30})\\&-1.1667)/5.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max\ \mu_2(f_2(x)) = ((&0.1x_1+0.15x_2+0.175x_3\\&+0.192x_4+0.2x_5+0.067x_6+0.1x_7\\&+0.125x_8+0.142x_9+0.15x_{10}+0.083x_{11}\\&+0.133x_{12}+0.15x_{13}+0.075x_{14}+0.133x_{15}\\&+0.083x_{16}+0.133x_{17}+0.167x_{18}\\&+0.183x_{19}+0.192x_{20}+0.067x_{21}\\&+0.092x_{22}+0.117x_{23}+0.133x_{24}\\&+0.142x_{25}+0.067x_{26}+0.117x_{27}\\&+0.125x_{28}+0.075x_{29}+0.133x_{30})\\&-0.5)/0.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max\ \mu_3(f_3(x)) = ((&0.105x_1+0.163x_2\\&+0.192x_3+0.213x_4+0.223x_5+0.069x_6\\&+0.105x_7+0.134x_8+0.153x_9+0.163x_{10}\\&+0.087x_{11}+0.143x_{12}+0.163x_{13}\\&+0.078x_{14}+0.143x_{15}+0.087x_{16}\\&+0.143x_{17}+0.183x_{18}+0.202x_{19}\\&+0.213x_{20}+0.069x_{21}+0.097x_{22}\\&+0.124x_{23}+0.143x_{24}+0.153x_{25}\\&+0.069x_{26}+0.124x_{27}+0.134x_{28}\\&+0.078x_{29}+0.143x_{30})-0.182)/0.511\end{aligned}$$

subject to

$$\begin{aligned}g_1(x) &= -0.083x_{11}-0.25x_{12}-0.5x13\\&\quad-0.075x_{14}-0.225x_{15} \leqq -0.25\\g_2(x) &= -0.067x_{26}-0.2x_{27}-0.4x_{28}\\&\quad-0.075x_{29}-0.225x_{30} \leqq -0.208\\g_3(x) &= -0.083x_{11}-0.133x_{12}-0.15x_{13}\\&\quad-0.075x_{14}-0.133x_{15} \leqq -0.133\\g_4(x) &= -0.067x_{26}-0.117x_{27}-0.125x_{28}\\&\quad-0.075x_{29}-0.133x_{30} \leqq -0.117\\g_5(x) &= 0.283x_1+0.295x_2+0.101x_3\\&\quad-0.123x_4-0.386x_5+0.185x_6+0.183x_7\\&\quad+0.089x_8-0.042x_9-0.205x_{10} \leqq 0\\g_6(x) &= 0.167x_{16}+0.161x_{17}+0.026x_{18}\\&\quad-0.169x_{19}-0.388x_{20}+0.131x_{21}\\&\quad+0.079x_{22}-0.044x_{23}-0.189x_{24}\\&\quad-0.36x_{25} \leqq 0\\g_7(x) &= -x_1-3x_2-6x_3-9x_4-12x_5\\&\quad-x_6-3x_7-6x_8-9x_9-12x_{10} \leqq -10\\g_8(x) &= -x_{11}-3x_{12}-6x_{13}-x_{14}-3x_{15}\\&\quad\leqq -3\\g_9(x) &= -x_{16}-3x_{17}-6x_{18}-9.x_{19}\\&\quad-12x_{20}-x_{21}-3x_{22}-6x_{23}-9x_{24}\\&\quad-12x_{25} \leqq -10\end{aligned}$$

$$g_{10}(x) = -x_{26}-3x_{27}-6x_{28}-1x_{29}-3x_{30} \leqq -3$$

$$g_{11}(x) = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leqq 1$$

$$g_{12}(x) = x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10} \leqq 1$$

$$g_{13}(x) = x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqq 1$$

$$g_{14}(x) = x_{14}+x_{15} \leqq 1$$

$$g_{15}(x) = x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}+x_{20} \leqq 1$$

$$g_{16}(x) = x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} \leqq 1$$

$$g_{17}(x) = x_{26}+x_{27}+x_{28} \leqq 1$$

$$g_{18}(x) = x_{29}+x_{30} \leqq 1$$

$$\begin{aligned} g_{19}(x) = {} & 0.93x_1+2.79x_2+5.022x_3 \\ & +7.533x_4+9.486x_5+1.3x_6+3.9x_7 \\ & +6.864x_8+10.296x_9+12.792x_{10} \\ & +1.8x_{11}+4.968x_{12}+9.936x_{13}+2.x_{14} \\ & +5.4x_{15}+0.93x_{16}+2.79x_{17}+5.022x_{18} \\ & +7.533x_{19}+9.486x_{20}+1.3x_{21}+3.9x_{22} \\ & +6.864x_{23}+10.296x_{24}+12.792x_{25} \\ & +1.8x_{26}+4.968x_{27}+9.936x_{28}+2.x_{29} \\ & +5.4x_{30} \leqq 50 \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \cdots, 30\ .$$

この問題では、制約式の係数値や右辺定数の符号が正負混在しているため、坂和ら［8］,［9］の二重構造のストリングやBean［1］のランダムキーによる方法は適用できないことに注意しよう。

まず、この問題に対して、単純遺伝的アルゴリズム（SGA）を以下の条件のもとで適用した。制約式をペネルティ項として目的関数に組み込むため、適応度関数を(4)式で定義し、個体数100個、突然変異率 $p_m = 0.01$ 、最大世代数10000として、交叉率 p_c を0.1から0.9まで0.1きざみで設定した場合の適用結果を**表 1** に示す。

表 1　SGA の適用結果

交叉率 p_c	最適解 $F(x_{opt})$	最適解が得られる世代
0.1	0.446964	7361
0.2	0.492418	5463
0.3	0.000000	10000
0.4	0.477327	8015
0.5	0.472782	3541
0.6	0.457509	2475
0.7	0.465145	444
0.8	0.442418	9871
0.9	0.465145	9586

この表から、交叉率 $p_c = 0.2$ のとき、最大適応度 $F(x_{opt})$ =0.492418,
x_{opt} =(000010010001000000010001001010)
が5463世代で得られた。この値は真の最適目的関数値（0.492418）と一致する。しかし、それ以外の交叉率 p_c ではすべて、10000世代までに得られた最大適応度は真の最適目的関数値には程遠く、交叉率 $p_c = 0.3$ の場合には、10000世代までに生成された個体のすべてが制約式を満たさなかったため、最大適応度がゼロとなっている。以上のことから、対象とする問題は、制約条件がきわめて厳しいため、制約条件をペナルティとして適応度関数に組み込んだSGAを直接適用しても、解の改善がなかなか進まないことが推測できる。

これに対して、ランダム0-1反転法を組み込んだSGAのアルゴリズム（SGAのアルゴリズムのステップ3を3’に置き換える）を、全く同じ条件（個体数100個、突然変異率 $p_m = 0.01$ ）として、交叉率 p_c を0.1から0.9まで0.1ずつ変更した場合の結果を**表 2** に示す。

この表から、きわめて小さな世代で、しかも、すべての交叉率に対して、真の最適目的関数値（0.492418）に到達しており、表1の

表2　ランダム0-1反転法による適用結果

交叉率 p_c	最適解 $F(x_{opt})$	最適解が得られる世代
0.1	0.492418	42
0.2	0.492418	44
0.3	0.492418	44
0.4	0.492418	35
0.5	0.492418	35
0.6	0.492418	32
0.7	0.492418	16
0.8	0.492418	30
0.9	0.492418	31

結果と比較すれば、提案するアルゴリズムがたいへん有効であることが理解できる。

おわりに

本論文では、制約式はすべて線形関数で、その係数や右辺定数の符号は任意であるようなファジー多目的0-1計画問題に対して、遺伝的アルゴリズムに基づくファジイ意思決定手法を提案した。また、提案した手法を広告媒体選択問題に適用し、従来のSGAによる方法と比較してきわめて効果的であることを示した。ランダム0-1反転法は、ヒューリステックな手法ではあるが、現在のところ、係数の符号が正負混在するような線形制約式を持つ0-1最適化問題に対して、遺伝的アルゴリズムを適用するための有効な手法と思われる。

注

[1] Bean, J.C.: "Genetic Algorithms and Random Keys for Sequencing and Optimization", ORSA Journal on Computing, **6** (**2**), pp.154-160 (1994).

[2] Bellmann, R.E. and Zadeh, L.A.: "Decision Making in a Fuzzy Environment", Management Science, **17**, pp.141-164 (1970).

[3] Goldberg, D.E.: "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning", Addison-Wesley, (1989).

[4] Herrera, F., Verdegay, J.L. and Zimmermann, H.-J.: "Boolean Programming Problems with Fuzzy Constraints", Fuzzy Sets and Systems, **55**, pp.285-293 (1993).

[5] Herrera,F. and Verdegay,J.L.: "Three Models of Fuzzy Integer Linear Programming", European Journal of Operational Research, **83**, pp.581-593 (1995).

[6] Herrera, F. and Verdegay, J.L.: "Fuzzy Boolean Programming Problems with Fuzzy costs: A General Study", Fuzzy Sets and Systems, **81**, pp.57-76 (1996).

[7] Michalewicz, Z.: "Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs", Second extended edition, Springer-Verlag (1994).

[8] 坂和, 乾口, 砂田、澤田："改良型遺伝的アルゴリズムによるファジー多目的組合せ最適化", 日本ファジー学会誌, 6 (1) pp.177-186 (1994).

[9] 坂和, 加藤, 砂田、園田："多目的0-1計画問題に対する改良型遺伝的アルゴリズムによる対話型ファジー満足化手法", 日本ファジー学会誌, 7 (2) pp.361-370 (1995).

[10] 田口, 玄, 井田："遺伝的アルゴリズムによる多目的非線形整数計画問題の一解法", 信学会論(A), J79-A pp.1221-1223 (1996).

[11] Ulungu,E.L. and Teghem,J.: "Multi-objective Combinatorial Optimization Problems: A Survey", Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, **3**, pp. 83-104 (1994).

[12] Wiedey, G. and Zimmermann, H.-J.: "Media Selection and Fuzzy Linear Programming", Journal of the Operational Research Society, **29** (**11**), pp.1071-1084 (1978).