名古屋市立大学経済学会

オイコノミカ

第 46 巻　第3号

条件付分散が不均一なモデルにおける相関のスペシフィケーションについて

程　島　次　郎

平 成 22 年 2 月 1 日 発 行

オイコノミカ　第46巻　第３号，2010年，pp.113-121

条件付分散が不均一なモデルにおける相関のスペシフィケーションについて[1)]

程　島　次　郎

１．はじめに

1980年代以降のautoregressive conditional heteroskedasticity（ARCH）モデルやgeneralized ARCH（GARCH）モデルの1次元の場合のさまざまな分野における成功の後で，多くの研究者はこれらのモデルの多次元への拡張を試みている．多次元の条件付不均一分散モデル（conditional heteroskedastic models）には多くの応用の可能性があり，当てはまりの良い多次元の条件付不均一分散モデルを考えることは重要なことである．

多次元のGARCHモデルは，これまでいくつか提案されてきている．Bollerslev et al.（1988）は，多次元GARCHモデルを最初に考えた．彼らは，１次元のGARCHモデルを多次元に拡張しているが，条件付多次元分散共分散行列をvechを用いてベクトルで表現するやり方でモデル化している．彼らの方法は，非常に一般的な形をしているが，多くのパラメータを推定する必要があり，単純化しないと推定精度などの点で推定が困難である．彼らの方法の１つの単純化されたモデルとして，条件付分散や共分散を遅れのある条件付分散や共分散と遅れのある残差の２乗や積を用いたGARCHモデルとして表現する，diagonal formがある．

Bollerslev（1990）は，応用によく使われるポピュラーな多次元GARCHモデルの１つのモデルを考えた．それは，個々の条件付分散は１次元のGARCHモデルに従い，相関が時間に関し一定な相関行列を仮定する，相関一定な多次元GARCHモデルである．正規分布を仮定した最尤推定量は，相関行列の最尤推定量についてはよく知られた標本相関行列と一致する．計算が容易なため多くの実証研究がこの相関一定な多次元GARCHモデルを使っている．しかし，相関一定という仮定は，ある種のデータによっては支持されていない仮定であることが多くの研究で知られている．

Engle and Kroner（1995）は，BEKKモデルという多次元GARCHモデルを提案している．BEKKモデルは，その条件付多次元分散共分散行列が正値定符号であることが満足される．

１）本研究は全国銀行学術研究振興財団の助成をうけた．記して感謝したい．

BEKKモデルは，そのパラメータが直観的に説明しにくく，将来の条件付分散や共分散に対する影響がはっきり解らないという欠点がある．

Tse and Tsui（2002）とEngle（2002）は，条件付分散は１次元GARCHモデルに従い，相関が時間とともに変動する多次元GARCHモデルを提案して，リーズナブルな実証結果を得ている．

本論文では，GARCHモデルとは異なる観点からSpanos（1994, 1995）が提案し実証的にも説得的な成果を得ている，条件付期待値が与えられた変数に関して線形で条件付分散が与えられた変数に依存するconditional t heteroskedastic modelを多次元に拡張した，多次元の条件付きt VARモデル（conditional t heteroskedastic VAR（vector autoregressive）model）を考える．McGuirk et al.（1993）やAndreau and Spanos（2003）は，遅れのある被説明変数が与えられたときのconditional t heteroskedastic modelがよく使われるGARCHモデルや単位根のあるモデルと比較してスペシフィケーションの誤りがないことを示している．また，Heracleous and Spanos（2006）では，与えられた変数が遅れのある被説明変数と別の変数である場合のconditional t heteroskedastic modelがアメリカの株価データとT-billを使った事例でいろいろなスペシフィケーションのチェックのためのテストをパスすることが示されている．本論文では，外国為替のデータを用いて多次元の条件付きt VARモデルを当てはめ，スペシフィケーションの診断のテストを行う．

本論文で考える条件付きt VARモデルでは，条件付分散と共分散が時間とともに変動するが，これらの条件付分散と共分散が時間とともに変動する部分は全く同じ成分によって引き起されている．したがって，多次元の条件付きt VARモデルでは，相関が時間に関して一定となる．そのため，Bollerslev（1990）とは異なるモデルであるが，相関が時間に関して一定な別なモデルとなる．

本論文では，Bollerslev（1990）の相関が時間に関して一定な多次元GARCHモデル，Tse and Tsui（2002）の相関が時間とともに変動する多次元GARCHモデル，（よく知られた時系列モデルの）VARモデル，多次元の条件付きt VARモデルの４つのモデルを比較する．

２．モデル

本論文では，y_tとI_{t-1}をｔ期でのｍ次元の変数およびｔ－１期で利用可能な情報量としたとき，条件付期待値と条件付分散共分散行列を次のように表す．すなわち，

$$E[y_t|I_{t-1}]=C_0+B_1y_{t-1}+\cdots+B_ky_{t-k} \tag{1}$$

$$V[y_t | I_{t-1}] = \Sigma_t \tag{2}$$

とする．ここで，(1)は条件付期待値がVARの形になっていることを示している．一方，(2)は条件付分散共分散行列が時間 t とともに変化する可能性を持つことを示しているが，具体的なスペシフィケーションは示されていない．条件付分散共分散行列のスペシフィケーションは，本論文では４つの場合を考える．

(i)　$\Sigma_t = \Sigma$

(ii)　$$\Sigma_t = \frac{\upsilon - 2}{m_2 + \upsilon - 2}\left[1 + \frac{\begin{pmatrix} y_{t-1} - \mu \\ y_{t-2} - \mu \\ \cdots \\ y_{t-k} - \mu \end{pmatrix}' \Omega \begin{pmatrix} y_{t-1} - \mu \\ y_{t-2} - \mu \\ \cdots \\ y_{t-k} - \mu \end{pmatrix}}{(\upsilon - 2)}\right]\Psi$$

ここで，μ とΩは，時系列$\{y_t\}$の広義定常性を仮定したときのy_tの期待値と（$y'_{t-1}, y'_{t-2}, \cdots, y'_{t-k})'$ の分散共分散行列を示し，Ψ は$m \times m$次元の正値定符号行列，$m_2 = mk$，υ はy_tが m次元 t 分布する場合の自由度を表す（Zellner（1971）のAppendix B2を参照）．

(iii)　$\gamma^2_{it} = \omega_i + \Sigma^p_{l=1}\alpha_{il}\gamma^2_{it-1} + \Sigma^q_{l=1}\beta_{il}\varepsilon^2_{it-1}$，$i = 1, \cdots, m$

$\Gamma_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\Gamma + \theta_1\Gamma_{t-1} + \theta_2\Lambda_{t-1}$

ここで，γ^2_{it}はΣ_tの i 番目の対角要素を表し，ε_{it}は$\varepsilon_t \equiv y_t - C_0 - B_1 y_{t-1} - \cdots - B_k y_{t-k}$の i 番目の要素で，$\Gamma = \{\rho_{ij}\}$は時間に関して一定な対角要素が１の正値定符号の行列，Λ_{t-1}はその要素が遅れのあるε_tの関数である$m \times m$の行列で具体的な形は後で示される，θ_1とθ_2は$\theta_1 + \theta_2 \leq 1$の制約を満足する非負のパラメータである．$\Gamma_t$は，時間とともに変化する条件付相関行列である．これは，Tse and Tsui（2002）で提案された相関が時間とともに変動するGARCH（ｐ，ｑ）モデルである．

(iv)　$\gamma^2_{it} = \omega_i + \Sigma^p_{l=1}\alpha_{il}\gamma^2_{it-1} + \Sigma^q_{l=1}\beta_{il}\varepsilon^2_{it-1}$，$i = 1, \cdots, m$

$\gamma_{ijt} = \rho_{ij}(\gamma^2_{it}\gamma^2_{jt})^{1/2}$，$1 \leq i < j \leq m$

ここで，γ^2_{it}はΣ_tの i 番目の対角要素を表し，ρ_{ij}はy_tの i 番目と j 番目の要素の条件付相関を示す．ρ_{ij}は，t と関連していないので，(iv)は相関一定なGARCH（ｐ，ｑ）モデルを意味する．γ_{ijt}は，時間 t における i と j の条件付共分散である．

(i)はVARモデル，(ii)は条件付t VARモデルをそれぞれ意味する．また，本論文では$m=2$の場

合を考える．そのため，(iii) での Γ_t の非対角要素は，

$$\rho_t=(1-\theta_1-\theta_2)+\theta_1\rho_{t-1}+\theta_2\lambda_{t-1} \tag{3}$$

で与えられる．ここで，λ_{t-1}は，

$$\lambda_{t-1}=\frac{\Sigma_{l=1}^{2}\frac{\varepsilon_{1t-1}}{\gamma_{1t-1}}\frac{\varepsilon_{2t-1}}{\gamma_{2t-1}}}{\sqrt{(\Sigma_{l=1}^{2}\frac{\varepsilon_{1t-1}^{2}}{\gamma_{1t-1}^{2}})(\Sigma_{l=1}^{2}\frac{\varepsilon_{2t-1}^{2}}{\gamma_{2t-1}^{2}})}} \tag{4}$$

で与えられる（Tse and Tsui（2002）の(10)式参照）．λ_{t-1}は，m＝2の場合のΛ_{t-1}と一致する．

３．データ

この論文で使用するデータは，2001年10月１日から2008年12月31日の米国ドルに対するユーロとポンドの為替レートの日次データの終値である．実際に分析に使うのは，この２つの為替データの前日と当日の終値の自然対数値の差に100を乗じた収益率である．ただ，２つの為替データには休日等のためデータが欠損している日があるが，両方のデータがそろって存在する日だけをデータにしているので，実際は数日間元のデータより少ないサンプル数になっている．図１には，２つの為替レートの終値のグラフが示されている．この図から，２つの為替レートは標本期間に日々変動しているが，レベルは違っていても同じような動きをしていることがわかる．このことは，２つの為替レートの終値の相関が標本期間内でかなり安定しているのではないかと想像させる．為替レートの収益率を図にしたのが，図２と図３である．図２と図３を見ると，２つの収益率は似た動きをしているが，相関が標本期間で安定しているのかは明確でない．収益率をとる前の元々の原データを示した図１の方が，相関が標本期間で安定していることがはっきり観察できるが，収益率のグラフである図２と図３では日次の変動が激しくて相関についてははっきりしない．

表１は，収益率のデータの基本統計量である．尖度の大きさは，正規分布の場合の３よりも大きく，ユーロもポンドも正規分布よりスソの厚い分布であり，歪度はユーロもポンドもあまり非対称性の度合いが強くない．Jarque-Bera統計量による正規性の検定では，２つとも正規分布でないことを強く示している．また２つの収益率の相関は，0.7281で，かなり強い相関を示しており，２次元ｔ分布の自由度の標本推定値（２次元の尖度と自由度の関係を利用した標本推定値）は5.2444とスソの厚いｔ分布となっている．

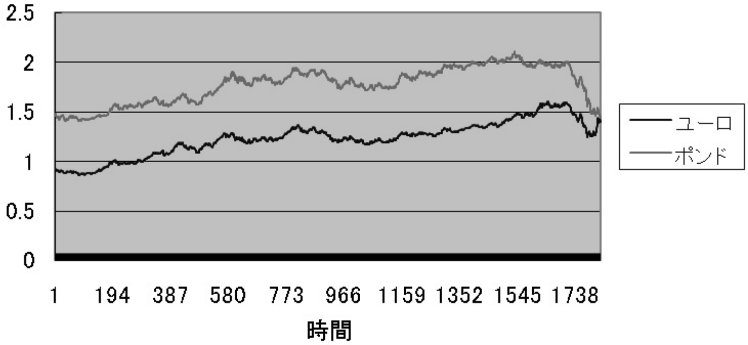

図１　外国為替レート

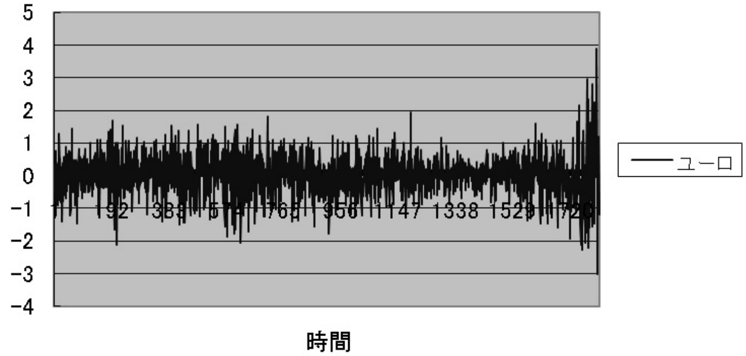

図２　収益率

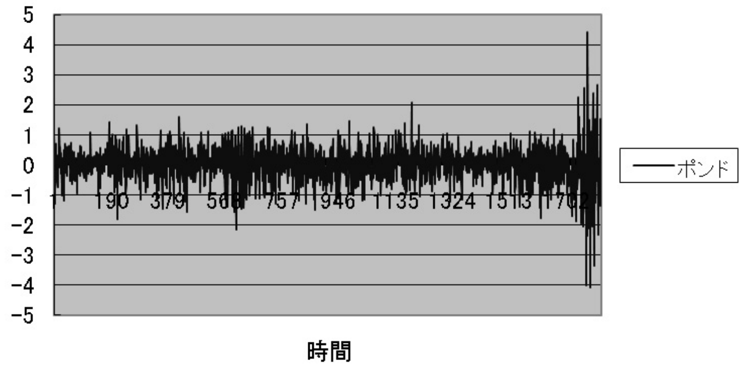

図３　収益率

表１　基本統計量

	ユーロ	ポンド
平均値	0.0230	-0.0006
中央値	0.0207	0.0241
標準偏差	0.6111	0.5913
分散	0.3734	0.3496
尖度	5.3533	8.5772
歪度	0.0335	-0.3868
Jarque-Bera統計量	419.3928	2398.8123
P-値	0.0000	0.0000
範囲	6.8945	8.5266
最大値	3.8914	4.4349
最小値	-3.0031	-4.0918

４．推定結果

推定結果が表２から表５で与えられている．これらの推定結果では，条件付期待値のVARのラグの大きさが１（k=1）で，変数の数は２なので，m=2，したがって$m_2=2$となる．またGARCHの次数は，GARCH（1,1）にしている．また，表２と表３では，g_{11}, g_{21}, g_{22}とh_{11}, h_{21}, h_{22}は以下のように定義される．これは，推定結果を示すために使う．

$$\Sigma = \Psi = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

表２　VARモデルの推定結果

C_{10}	C_{20}	B_{11}	B_{21}	B_{12}	B_{22}
0.0218	-0.0007	0.0496	0.0298	-0.0621	-0.0053
(1.524)	(-0.051)	(1.203)	(0.601)	(-1.327)	(-0.104)
g_{11}	g_{21}	g_{22}	対数尤度の平均値	AIC	
0.6105	0.4306	0.4040	-1.4374	2.8848	
(40.785)	(23.034)	(28.124)			

推定値は，正規性を仮定したQMLE．（　）の中の値は，QMLE漸近分散共分散行列に基づく t 値を示す．

表３　条件付t VARモデルの推定結果

C_{10}	C_{20}	B_{11}	B_{21}	B_{12}	B_{22}
0.0218 (1.521)	−0.0007 (−0.050)	0.0497 (1.446)	0.0299 (0.901)	−0.0622 (−1.755)	−0.0055 (−0.161)
μ_1	μ_2	g_{11}	g_{21}	g_{22}	h_{11}
0.1122 (0.349)	0.1074 (0.384)	1.8556 (60.283)	1.3086 (36.280)	1.2280 (60.281)	18.7803 (3.312)
h_{21}	h_{22}	対数尤度の平均値	AIC		
8.6549 (1.096)	13.7981 (2.931)	−4.9187	9.8539		

推定値は，２次元ｔ分布の下でのMLE.（　）の中の値は，ヘシアンの逆行列に基づくｔ値を示す.

表４　相関一定の２次元GARCH（1,1）モデルの推定結果

C_{10}	C_{20}	B_{11}	B_{21}	B_{12}	B_{22}
0.0291	0.0144	0.0164	0.0028	−0.0447	0.0113
ω_1	α_1	β_1	ω_2	α_2	β_2
0.0012	0.0302	0.9628	0.0028	0.0455	0.9482
対数尤度の平均値	AIC				
−1.2460	2.5053				

推定値は，正規性を仮定したQMLE.

表５　相関が変化する２次元GARCH（1,1）モデルの推定結果

C_{10}	C_{20}	B_{11}	B_{21}	B_{12}	B_{22}
0.0334	0.0200	0.0232	0.0064	−0.0530	0.0077
ω_1	α_1	β_1	ω_2	α_2	β_2
0.0001	0.4587	0.0015	0.0001	0.4507	0.0019
θ_1	θ_2	ρ	対数尤度の平均値	AIC	
0.3721	0.0003	0.7356	−1.2534	2.5233	

推定値は，正規性を仮定したQMLE.

推定は，VARモデル，相関一定の２次元GARCH（1,1）モデル，相関が変化する２次元GARCH（1,1）モデルでは，正規性を仮定したQMLE（quasi-maximum likelihood estimator）を用い，条件付t VARモデルは２次元ｔ分布を仮定したMLE（maximum likelihood estimator）を用いている.

VARモデルと条件付t VARモデルの推定では，条件付期待値のパラメータは皆有意でない．一方，条件付分散共分散行列のパラメータは，条件付t VARモデルのh_{21}を除いてすべて有意であ

る．相関一定の２次元GARCH（1, 1）モデルと相関が変化する２次元GARCH（1, 1）モデルのQMLEの漸近分散共分散行列は，QMLEを求めるアルゴリズムで逆行列が存在しないために得られていない．そのため，これら２つのモデルのパラメータの有意性は，残念ながら不明である．対数尤度の平均値が４つのモデルで計算されているが，その大きさは，最大が相関一定の２次元GARCH（1, 1）モデル，２番目が相関が変化する２次元GARCH（1, 1）モデル，３番目がVARモデル，４番目が条件付t VARモデルである．AICの大きさも，小さい方から数えたときの順番は，対数尤度の平均値の大きい方から数えた順番と同じである．したがって，最も良いモデルは，相関一定の２次元GARCH（1, 1）モデルである．

さらに我々は，Wooldridge（1990, 1991）の条件付分散と条件付相関に対する診断検定を計算した．この２つの診断検定の計算は，Tse and Tsui（2002）のやり方にならった．条件付標準偏差（条件付分散の正の平方根）で割った標準化された残差ε_{it}の推定値を$\hat{\varepsilon}_{it}$と示し，y_{it}の条件付分散の推定値を$\widehat{\gamma}_{it}^{2}$と示す．さらに，$\hat{\lambda}_{it}=(\hat{\varepsilon}_{it-1}^{2}, \hat{\varepsilon}_{it-2}^{2}, \cdots, \hat{\varepsilon}_{it-Q}^{2})'$とし，$\nabla_{\theta}\widehat{\gamma}_{it}^{2}$を$\gamma_{it}^{2}$の$\theta$に関する１次微分のベクトルを推定値$\hat{\theta}$で評価したものとする．ここで，$\theta$は，条件付分散共分散行列についてのパラメータを一般的に示したものである．$\nabla_{\theta}\widehat{\gamma}_{it}^{2}/\widehat{\gamma}_{it}^{2}$を$\nabla_{\theta}\widehat{\gamma}_{it}^{-2}$と表し，$\hat{\lambda}_{it}$の各要素を$\nabla_{\theta}\widehat{\gamma}_{it}^{-2}$に回帰してQ個の残差$\hat{r}_{it}$を得る．最後に１をQ個の説明変数$\hat{\Phi}_{it}\hat{r}_{it}$に回帰する．ここで，$\hat{\Phi}_{it}=\hat{\varepsilon}_{it}^{2}-1$である．そして$W_i(Q)=T-SSR$を計算する（ここで，Tは標本の大きさ，SSRは最後の回帰での残差２乗和である）．モデルにミススペシフィケーションがないときは，$W_i(Q)$は漸近的に自由度Qのχ^2分布に収束することがWooldridgeにより証明されている．

条件付相関の検定として，異なる式の標準化された残差の積に対する診断検定も計算できる．$\hat{\lambda}_{ijt}=(\hat{\varepsilon}_{it-1}\hat{\varepsilon}_{jt-1}, \hat{\varepsilon}_{it-2}\hat{\varepsilon}_{jt-2}, \cdots, \hat{\varepsilon}_{it-Q}\hat{\varepsilon}_{jt-Q})'$とし，$\nabla_{\theta}\hat{\Phi}_{ijt}$を$\Phi_{ijt}=\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}-\rho_{ijt}$の$\theta$に関する１次微分のベクトルを$\hat{\theta}$で評価したものとする．ここで$\rho_{ijt}$は，条件付相関を示す．そして，$\hat{\lambda}_{ijt}$の各要素を$\nabla_{\theta}\hat{\Phi}_{ijt}$に回帰しQ個の残差$\hat{r}_{ijt}$を得，１をQ個の説明変数$\hat{\Phi}_{ijt}\hat{r}_{ijt}$に回帰する．ここで，$\hat{\Phi}_{ijt}=\hat{\varepsilon}_{it}\hat{\varepsilon}_{jt}-\hat{\rho}_{ijt}$とする．このとき$W_{ij}(Q)=T-SSR$は，モデルにミススペシフィケーションがないとき自由度Qのχ^2分布をする．ただし，SSRは最後の回帰での残差２乗和である．

Tse and Tsui（2002）と同じように，Q＝4の場合のWooldridge（1990, 1991）の診断検定の結果が表６に与えられている．それによれば，条件付相関係数の検定は４つのモデルのどのモデルでも有意でないが，条件付分散の検定では条件付t VARモデルを除いて他の３つのモデルでは有意であった．したがって，条件付分散と条件付相関係数の検定では，条件付t VARモデルだけがミススペシフィケーションがないという結果になる．そのため，対数尤度の平均値やAICの基準では，条件付t VARモデルは一番悪いモデルだが，ミススペシフィケーションの診断では条件付t VARモデルだけが問題がないという結論になる．このことは，使って良いモデルは条件付t VAR

表６　Wooldridgeの診断検定

Ａ：VARモデル			
	W_1	W_2	W_{12}
	53.169	34.298	0.743
Ｂ：条件付t VARモデル			
	W_1	W_2	W_{12}
	4.234	4.278	0.011
Ｃ：相関一定の２次元GARCH（1,1）モデル			
	W_1	W_2	W_{12}
	308.997	253.331	0.229
Ｄ：相関が変化する２次元GARCH（1,1）モデル			
	W_1	W_2	W_{12}
	74.044	117.480	0.427

モデルだけなので，当てはまりが相対的に良くないといっても，採用すべきは条件付t VARモデルだけという結論になる．そしてこの結論は，McGuirk et al.（1993）やAndreau and Spanos（2003）でのconditional t heteroskedastic modelでの結果と似たものとなっていると言える．

参考文献

Andreau E. and Spanos A. (2003), ”Statistical adequacy and the testing of trend versus difference stationarity,” *Econometric Reviews*, 22, 217-237.

Bollerslev, T. (1990), ”Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model,” *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.

Bollerslev, T., Engle, R. F., and Wooldridge, J. M. (1988), ”A capital asset pricing model with time-varying covariances,” *Journal of Political Economy*, 96, 116-131.

Engle, R.F. (2002), ”Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339-350.

Engle, R.F. and Kroner, K.F.(1995), ”Multivariate simultaneous generalized ARCH,” *Econometric Theory*, 11, 122-150.

Heracleous, M.S., and Spanos, A. (2006), ”The student’s t dynamic linear regression: Re-examining volatility modeling,” in *Econometric Analysis of Financial and Economic Time Series*, Part A, *Advances in Econometrics*, 20, 289-319.

McGuirk, A., Robertson, J., and Spanos, A. (1993), ”Modeling exchange rate dynamics: Non-linear dependence and thick tails,” *Econometric Reviews*, 12, 33-63.

Spanos, A. (1994), ”On modeling heteroskedasticity: The student’s t and elliptical linear regression models,” *Econometric Theory*, 10, 286-315.

Spanos, A. (1995), ”On theory testing in econometrics: Modeling with nonexperimental data,” *Journal of Econometrics*, 67, 189-226.

Tse, Y.K. and Tsui, A.K.C. (2002), ”A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 351-362.

Wooldrige, J.M. (1990), ”A unified approach to robust, regression-based specification tests,” *Econometric Theory*, 6, 17-43.

Wooldrige, J.M. (1991), ”On the application of robust, regression-based diagnostics to models of conditional means and conditional variances,” *Journal of Econometrics*, 47, 5-46.

Zellner, A.(1971), *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley.

（2009年11月19日受領）

平成22年２月１日発行
編集者　名古屋市立大学経済学会
名古屋市瑞穂区瑞穂町字山の畑１
印刷所　㈱正鵠堂