Faà di Bruno の公式とその応用 I

The formula of Faà di Bruno and its applications I

岡野 節[1], 奥戸 雄二[1], 清水 昭信[1]
新倉 保夫[2], 橋本 佳明[1], 山田 浩[3]

Takshi Okano[1], Yuji Okuto[1], Akinobu Shimizu[1]
Yasuo Niikura[2], Yoshiaki Hashimoto[1], Hiroshi Yamada[3]

1 名古屋市立大学自然科学研究教育センター
2 名古屋市中川区八家町 1-112
3 名古屋市天白区島田 2-301 島田橋住宅 2-1101

1 Institute of Natural Sciences, Nagoya City University, Mizuho-ku, Nagoya 467-8501, Japan
2 Yatsuya-cho 1-112, Nakagawa-ku, Nagoya 454-0835, Japan
3 Shimadabashi-jutau 2-1101, Shimada 2-301,Tenpaku-ku, Nagoya 468-0056, Japan

概要

Faà di Bruno の公式を 証明し, 組み合わせ論と Hermite 多項式へのその応用を議論する.
The formula of Faà di Bruno is proved, and its applications to combinatorics and Hermite polynomials are discussed.

Key words and phrases: The formula of Faà di Bruno, Stirling number of the second kind, Hermite polynomial

1 はじめに

2 つの実変数実数値関数の合成関数の高階導関数を与える公式, つまり Faà di Bruno の公式は 一般に広く知られているとはいえないようである. 実際, Krantz and Parks [7] (p.15) も
The following formula for the derivatives of a composition of two functions is not very well-known.
という文章を書いている. この公式の命題を記述したものとしては, 一松 [4],[7], 森口他 [9], Riordan [10], Roman [11], 高木 [16] 等がある. しかし, 証明を与えたものは [11] をのぞいて 見当たらないという状態である. [11] の証明は 初等的とは言い難いため, ここでは まずこの Faà di Bruno の公式の 初等的証明を 与え, 次に この公式の応用について 考察する. 第一の応用は, 組み合わせ論で知られているいくつかの等式を, 機械的ではあるが統一的に 証明することである. 第二の応用は, Hermite 多項式の性質を導くことである. Hermite 多項式は, 多くの文献で議論されているが, Faà di Bruno の公式を用いる方法が 最も簡明であると思われる.
Faà di Bruno の公式 は, 組み合わせ論, 特殊関数論, 微分方程式論, 確率論等 数学の多方面に 応用があると 思われる. これらの応用については, 改めて 別の論文として 書く予定である.

2 Faà di Bruno の公式

1 次元ユークリッド空間 R^1 の開区間 I において定義された C^∞ 級の実数値関数 $f(x)$ と，この $f(x)$ の値域を含む開区間で定義された C^∞ 級の関数 $g(y)$ との合成関数 $F(x)=g(f(x))$ を考え，この関数の高階導関数を議論する．以後この節においては，特に断らない限り，関数 $f(x)$ と $g(y)$ は上の条件を満たすものとする．

まず，自然数 n の分割の定義を述べよう．$\boldsymbol{N}$ は非負整数全体とする．$\beta:=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in \boldsymbol{N}^n$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^n i\beta_i=n$ をみたすとき，β を自然数 n の分割という．自然数 n の分割全体を $\mathcal{P}_n$ で表し，$\beta\in\mathcal{P}_n$ に対し $|\beta|=\sum_{j=1}^n\beta_j$ とおく．

Theorem 2.1 (Faà di Bruno) n を自然数，$x\in I$ とする．関数 $F(x)$ の n 階導関数 $F^{(n)}(x)$ は，次のように表される．

$$F^{(n)}(x)=\sum_{d=1}^n\sum_{\beta\in\mathcal{P}_n,|\beta|=d}\frac{n!}{\prod_{j=1}^n\beta_j!}\prod_{k=1}^n\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right)^{\beta_k}g^{(d)}(f(x)). \tag{2.1}$$

Theorem 2.1 の証明の前に，次の Lemma を準備しよう．

Lemma 2.1 実変数実数値関数 $h(u)$ は，$u=0$ の近傍で

$$h(u)=\sum_{i=1}^n a_iu^i+o(u^n),\quad u\to 0$$

を満たすとする．$n\geq d$ とするとき

$$h(u)^d=\sum_{m=d}^n B_{m,d}u^m+o(u^n),\quad u\to 0,$$

$$B_{m,d}=\sum_{\beta\in\mathcal{P}_m,|\beta|=d}\frac{d!}{\prod_{j=1}^m\beta_j!}\prod_{k=1}^m a_k^{\beta_k}, \tag{2.2}$$

が成り立つ．

Proof of Lemma 2.1.

$$\begin{aligned}
h(u)^d &= \{\sum_{i=1}^n a_iu^i+o(u^n)\}^d=\{\sum_{i=1}^n a_iu^i\}^d+o(u^n)\\
&= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in N^n,\sum_i\alpha_i=d}\frac{d!}{\prod_{j=1}^n\alpha_j!}\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k}u^{\sum_k k\alpha_k}+o(u^n)\\
&= \sum_{m=d}^n\Big(\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in N^n,|\alpha|=d,\sum_i i\alpha_i=m}\frac{d!}{\prod_{j=1}^n\alpha_j!}\prod_{k=1}^m a_k^{\alpha_k}\Big)u^m+o(u^n)
\end{aligned}$$

この最後の辺の $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ は, 自然数 m の分割であることに注意しよう. $m \leq n$ ならば, $\mathcal{P}_m \subset N^n$ である. 自然数の分割を β であらわすことにして,

$$h(u)^d = \sum_{m=d}^{n} (\sum_{\beta \in \mathcal{P}_m, |\beta|=d} \frac{d!}{\prod_{j=1}^{n} \beta_j!} \prod_{k=1}^{m} a_k^{\beta_k}) u^m + o(u^n)$$

を得る. 証明終わり.

Proof of Theorem 2.1.
$y_0 = f(x_0)$ とおく. 関数 $g(y)$ の Taylor 展開

$$g(y) - g(y_0) = \sum_{d=1}^{n} \frac{g^{(d)}(y_0)}{d!} (y - y_0)^d + o((y - y_0)^n)$$

の右辺に, 関数 $f(x)$ の Taylor 展開

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

を代入する. $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, u = x - x_0$ として Lemma 2.1 を適用して

$$\begin{aligned}
g(f(x)) - g(f(x_0)) &= \sum_{d=1}^{n} \frac{g^{(d)}(y_0)}{d!} (\sum_{m=d}^{n} B_{m,d} (x - x_0)^m + o((x - x_0)^n)) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (\sum_{d=1}^{m} \frac{g^{(d)}(y_0)}{d!} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_m, |\beta|=d} \frac{d!}{\prod_{j=1}^{m} \beta_j!} \prod_{k=1}^{m} (\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!})^{\beta_k}) (x - x_0)^m + o((x - x_0)^n) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} (\sum_{d=1}^{m} g^{(d)}(y_0) \sum_{\beta \in \mathcal{P}_m, |\beta|=d} \frac{m!}{\prod_{j=1}^{m} \beta_j!} \prod_{k=1}^{m} (\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!})^{\beta_k}) (x - x_0)^m + o((x - x_0)^n)
\end{aligned}$$

を得る. この式と, 関数 $g(f(x))$ を $x = x_0$ の近傍で Taylor 展開した式を比較して定理の結論を得る.

Theorem 2.1 において, 特に $g(x) = \exp\{ax\}$ の場合がしばしば応用される. この場合に Theorem 2.1 を, 書き換えると次のようになる.

Corollary 2.1 $x \in I$ のとき

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{af(x)} = \sum_{d=1}^{n} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_n, |\beta|=d} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} \beta_j!} \prod_{k=1}^{n} (\frac{f^{(k)}(x)}{k!})^{\beta_k} a^d e^{af(x)} \tag{2.2}$$

が成り立つ.

Remark 2.1 この節の出発点において, 関数 $f(x)$ と $g(y)$ に無限回連続的微分可能であることを仮定していたが, *Faà di Bruno* の公式を得るための条件としては強すぎることは明らかである. (2.1) が $x = x_0$ で成り立つためには, $f(x)$ は $x = x_0$ の近傍で C^{n-1} 級の関数であり, $x = x_0$ において n 階微分可能, $g(y)$ も同様に, $y = y_0$ の近傍で C^{n-1} 級で $y = y_0$ で n 階微分可能であれば十分である. これは, 上記の証明をみれば明らかである.

3 組み合わせ論的等式

はじめに, いくつかの組み合わせ論的数について定義と解説をする.

$$c(n,k)=\sum_{\beta;|\beta|=k}\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j^{\beta_j}\beta_j!)},\quad 1\le k\le n, \tag{2.1}$$

により定義される $c(n,k)$ を signless Stirling number of the first kind という. n 次の置換 $\pi\in\mathcal{S}_n$ は巡回置換の積にあらわされるが, この中に現われる長さ i の巡回置換の個数を β_i とすると, $\sum_i i\beta_i=n$ となっていてこの $\beta=\{\beta_i\}$ は, 自然数 n の分割を与える. このような π を β タイプの置換と呼ぶ. β タイプの置換の総数は

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j^{\beta_j}\beta_j!)}$$

に等しく, 従って, k 個の巡回置換の積で表される置換の総数が $c(n,k)$ と一致する.

$$s(n,k)=(-1)^{n-k}c(n,k),\quad 1\le k\le n, \tag{2.2}$$

により定義される $s(n,k)$ を Stirling number of the first kind という.
n 個の要素からなる集合を k 個の空でないブロックに分ける分割の総数 $S(n,k)$ を Stirling number of the second kind という. 等式

$$S(n,k)=\sum_{\beta;|\beta|=k}\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}((j!)^{\beta_j}\beta_j!)},\quad 1\le k\le n, \tag{2.3}$$

が成り立つ. $c(n,k)$ と $S(n,k)$ の違いに注意せよ. n 個の要素からなる集合の分割の総数 $B(n)$ を Bell number という. つまり

$$B(n)=\sum_{k=1}^{n}S(n,k), \tag{2.4}$$

である.

Proposition 3.1 変数 x の n 次多項式についての等式

$$\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}s(n,k)x^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), \tag{2.6}$$

が成り立つ.

Proof.

$$f(t)=t^{-x}=e^{-x\log t}$$

とおく. $f(t)=t^{-x}$ を用いて

$$f^{(n)}(t)=(-1)^n x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)t^{-x-n} \tag{2.7}$$

であるが, 一方 Faà di Bruno の公式により, $f(t) = e^{-x \log t}$ から

$$
\begin{aligned}
f^{(n)} &= \sum_{\beta \in \mathcal{P}_n} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}((j!)^{\beta_j}\beta_j!)} \prod_{k=1}^{n} \{(-x)(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{t^k}\}^{\beta_k} t^{-x} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{P}_n} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j^{\beta_j}\beta_j!)} x^{|\beta|}(-1)^n t^{-n-x} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_n, |\beta|=k} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j^{\beta_j}\beta_j!)} x^k (-1)^n t^{-n-x} \\
&= (-1)^n \sum_{k=1}^{n} c(n,k) x^k t^{-n-x}
\end{aligned}
$$

この最後の式と (2.7) から (2.5) を得る.
(2.5) の両辺において, x に $-x$ を代入し両辺に $(-1)^n$ を掛けると (2.6) を得る.

Proposition 3.2 a, λ を定数とするとき, 任意の実数 x に対して等式

$$
\exp\{\lambda(e^{ax}-1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!} \sum_{d=1}^{n} S(n,d)\lambda^d, \tag{2.8}
$$

が成り立つ.

Proof.

$$
F(x) = \exp\{\lambda(e^{ax}-1)\}
$$

とおく. n 階導関数を計算して

$$
\begin{aligned}
F^{(n)}(x) &= \sum_{\beta} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}((j!)^{\beta_j}\beta_j!)} \prod_{k=1}^{n} (\lambda a^k e^{ax})^{\beta_k} F(x) \\
&= a^n F(x) \sum_{\beta} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}((j!)^{\beta_j}\beta_j!)} \lambda^{|\beta|} e^{|\beta|ax}
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
F^{(n)}(0) &= a^n F(0) \sum_{\beta} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}((j!)^{\beta_j}\beta_j!)} \lambda^{|\beta|} \\
&= a^n \sum_{d=1}^{n} \sum_{\beta; |\beta|=d} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}((j!)^{\beta_j}\beta_j!)} \lambda^d \\
&= a^n \sum_{d=1}^{n} S(n,d)\lambda^d
\end{aligned}
$$

となる. $F(z) = \exp\{\lambda(e^{az}-1)\}$ は, 複素平面全体で解析的だから, Cauchy の積分公式により, 収束半径無限大の冪級数に展開される ([15], [16]). 従って, (2.8) が成り立つことが分かる.

Corollary 3.1 確率変数 X の分布がパラメーター λ のポアソン分布であるとき，即ち $P[X=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $(k=0,1,2,\cdots)$ であるとき，

$$E[X^n]=\sum_{d=1}^{n}S(n,d)\lambda^d \tag{2.9}$$

が成り立つ．

Proof.

$$E[e^{-xX}]=\exp\{\lambda(e^{-x}-1)\}$$

だから，両辺を x で n 回微分し $x=0$ とおく．右辺は (2.8) において $a=-1$ としたものだから

$$E[X^n]=\sum_{d=1}^{n}S(n,d)\lambda^d \tag{2.10}$$

を得る．

Lemma 3.1 確率変数 X_λ の分布はパラメーター λ のポアソン分布とし，$P(x),Q(x)$ は x の多項式とする．等式

$$E[P(X_\lambda)]=E[Q(X_\lambda)] \tag{2.11}$$

が任意の $\lambda>0$ に対して成り立つならば，

$$P(x)\equiv Q(x)$$

である．

Proof. (2.11) を書き直すと

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}Q(k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

である．従って，$R(x)$ を多項式とするとき

$$\sum_{k=0}^{\infty}R(k)\frac{\lambda^k}{k!}\equiv 0 \tag{2.12}$$

から $R(x)\equiv 0$ を導けばよい．(2.12) を変形して

$$R(0)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\frac{\lambda^{k-1}}{k!}\equiv 0$$

$\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\frac{\lambda^{k-1}}{k!}$ は λ が有界な範囲をうごくとき有界であるから，ここで $\lambda\downarrow 0$ として，$R(0)=0$ と

$$\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\frac{\lambda^{k-1}}{k!}\equiv 0$$

をうる．以後，同様の議論を繰り返し，$R(k)=0,\quad 0\le k<\infty$ を 得る．従って $R(x)\equiv 0$ となる．

Proposition 3.3

$$x^n = \sum_{d=1}^{n} S(n,d)\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-d+1) \tag{2.13}$$

Proof. $P(x) = x^n, Q(x) = \sum_{d=1}^{n} S(n,d)x(x-1)(x-2)\cdots(x-d+1)$ とおくと
(2.10) により,

$$E[P(X_\lambda)] = E[Q(X_\lambda)]$$

が任意の $\lambda > 0$ に対して成り立つことがわかる. 従って, Lemma 2.1 により, $P(x) \equiv Q(x)$ を得る.

Proposition 3.4 等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\} \tag{2.14}$$

が成り立つ.

Proof.
(2.8) において, $a = \lambda = 1$ とおけばよい.

Proposition 3.5

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k \tag{2.15}$$

Proof. (2.14) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a^n x^n|}{n!} \sum_{d=1}^{n} S(n,d)|\lambda|^d < \infty$$

であるから, (2.8) の右辺の和の順序交換ができる. 従って, $a = 1$ として

$$\exp\{\lambda(e^x - 1)\} = \sum_{d=1}^{\infty}(\sum_{n=d}^{\infty} S(n,d)\frac{x^n}{n!})\lambda^d$$

左辺を λ の関数として展開し λ^k の係数を比較すればよい.

Remark 2.1 (2.8) の証明において, 複素変数関数論における Cauchy の積分公式を用いている. 従って, この節の (2.8) 式以後の議論は, 実変数関数論の枠組みのなかには収まっていない. また, 2つの複素解析関数の合成関数が解析的であることも用いている. 一方, 2つの実解析関数の合成関数が実解析的であることは, 複素変数関数論の助けをかりずに証明できる ([7]). しかし, R^1 全体で実解析的である関数を冪級数に展開したとき, 収束半径は, 必ずしも無限大とはならない.

Remark 2.2 (2.5), (2.6), (2.13), (2.14), (2.15) は, いづれも Stanley[14] において組み合わせ論的に証明されている. ここでは, Theorem 1.1 を駆使して 非組み合わせ論的証明を与えた.

Remark 2.3 (2.10), (2.11) において確率を使う必要はない.

$p_\lambda(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$ とおけば,
(2.10) の左辺 $= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^n p_\lambda(k)$ である.
また、(2.11) 式は

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k)p_\lambda(k) = \sum_{k=0}^{\infty} Q(k)p_\lambda(k)$$

と書き直される.

Remark 2.4 (2.10) は初等的確率論の入門書や文献に殆ど現われていない. Johnson, Kotz and Kemp[6] (p.156) には記述がある. ここでは,(2.13) 式を組み合わせ論で証明しそれを用いている.
(2.13) は, 通常次のように組み合わせ論で証明される.
n 個の要素をもつ集合 N から, x 個の要素をもつ集合 X への写像を考える. 左辺はこのような写像全体の個数である. 一方, この写像をいくつかの場合に分けて数えよう. $d(1 \le d \le n)$ 個の要素からなる X の部分集合 X_d を考える. このような部分集合 X_d の選び方は $\binom{x}{d}$ 通りである. N から X_d の上への写像全体の個数は, Stirling number of the second kind $S(n,d)$ の定義より $S(n,d)d!$ 通り. 従って, N から X への写像全体の総数は

$$\sum_{d=1}^{n} \binom{x}{d} S(n,d)d! = \sum_{d=1}^{n} S(n,d)x(x-1)\cdots(x-d+1)$$

となる. こうして, (2.13) が得られる.

4 Hermite 多項式

Hermite 多項式 $H_n(x)$ は,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{3.1}$$

によって定義されることが多いが, この n 階の微分を直接実行せずこの多項式を議論するのが通例である. ここでは, (3.1) を Hermite 多項式の定義とし, Faà di Bruno の公式を駆使して, 次の命題を導こう.

Proposition 4.1

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \exp\{2xt - t^2\} \tag{3.3}$$

が成り立つ.

Proof. Theorem 1.1 において, $f(x) = -x^2$, $a = 1$ とおく. $f'(x) = -2x, f"(x) = -2, f^{(k)}(x) \equiv 0, k \ge 3$ であるから, (1.1) の右辺の和は $\beta_1 + 2\beta_2 = n, \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$ をみたすような自然数の分割 β のみについて考え

れば十分である.
$r=\beta_2$ とおくと $\beta_1=n-2r$ だから,

$$\begin{aligned}(-1)^n e^{x^2}\frac{d}{dx^n}e^{-x^2} &= (-1)^n\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{n!}{(n-2r)!r!}(-2x)^{n-2r}(-2)^r\\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}\end{aligned}$$

となる. (3.3) の導きかたとして, Faà di Bruno を用いて, 右辺を微分する方法もあるが, ここでは, 左辺を変形して 右辺に等しいことを示そう.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{1}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}t^n\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=2r}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}t^n\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{t^{2r}}{r!}\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k\frac{t^k}{k!}\\ &= e^{-t^2}e^{2xt}=e^{2xt-t^2}\end{aligned}$$

この２重級数は絶対収束しているから, 和の順序交換は可能であることに注意せよ. 証明終わり.

Remark 3.1 Hermite 多項式の定義について：
飛田 [3], 犬井 [5], スミルノフ [13], 高木 [16], 寺沢 [17] では (3.1) により定義している. Courant and Hilbert [2] では, (3.3) によって定義している.

Remark 3.2 (3.2) の導出について：
ミラー [8] の方法は, (3.1) を出発点とし,$H_n(x)$ のみたす微分方程式

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

を導き, この微分方程式の多項式解を求め (3.2) を導いている.
[5] においては, n についての数学的帰納法により (3.2) を証明している. 即ち,

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=(-1)^n\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}e^{-x^2}$$

が成り立つとして, この両辺を微分して 帰納法を完結させている.

Remark 3.3 (3.3) の導出について：
[5], [11] のいずれにおいても, Cauchy の積分公式を応用した次のような導出である.
(3.2) より

$$H_n(x)=(-1)^n\frac{e^{x^2}n!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}dz$$

ここで, γ は, 複素平面上の x を内部に含む単一閉曲線, 積分は複素平面上の線積分. ここで, 変数変換をする. $x-z=t$ とおいて

$$H_n(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma'}\frac{e^{2xt-t^2}}{t^{n+1}}dt$$

(γ' は, 原点を内部に含む単一閉曲線) を得る. この式は, $H_n(x)$ が e^{2xt-t^2} の $t=0$ における n 階微分係数であることをしめしている. こうして (3.3) が得られる.
[17] においては, (3.3) の右辺, つまり Hermite 多項式の母関数の t についての n 回微分を計算しているが,

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{x^2}e^{-(t-x)^2}|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

という計算を用いて (3.3) を導いている.

References.

[1]E. T. Bell, Exponential polynomials, Ann. Math. Vol. 35(1934), 258-277.
[2]R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. 1, First English Edition, Interscience Publishers (1937).
[3] 飛田 武幸, 「ブラウン運動」, 岩波書店 (1975).
[4] 一松信, 「解析学序説 上巻」, 裳華房 (1962).
[5] 犬井 鉄郎, 「特殊関数」, 岩波全書 (1962).
[6]N. J. Johnson, S. Kotz and A. W. Kemp, *Univariate Discrete Distributions*, Second Edition ,Wiley (1993).
[7]S. G. Krantz and H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions* , Birkhauser Verlag, Base-Boston-Berlin(1992).
[8] K.S. ミラー, (佐藤 常三, 藤井澄二訳), 「技術者の数学」, 共立全書 (1959).
[9] 森口 繁一, 宇田川圭久, 一松 信, 「数学公式 I, II, III」, 岩波全書 (1979).
[10]J. Riordan, Derivatives of composite functions, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 52(1946), 664-667.
[11]S. Roman, The Formula of Faà di Bruno, American Mathematical Monthly, 87(1980), 805-809.
[12] 清水 昭信, Generalized Ewens' Sampling Formulas, 数理解析研究所講究録 1193(2001), 64-78.
[13]V.I. スミルノフ, 「高等数学教程 7」, 共立出版 (1959)
[14] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics,*Vol.1,Wadsworth-Brooks (1986).
(成島弘, 山田浩, 渡辺敬一, 清水昭信 訳)「数え上げ組み合わせ論 I」, 日本評論社 (1990).
[15] 高橋 礼司, 「複素解析」, 東京大学出版会 (1990).
[16] 高木 貞治, 「解析概論」, 改訂第3版, 岩波書店 (1975).
[17] 寺澤 寛一, 「数学概論」, 岩波書店 (1958).
[18] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition, Cambride University Press (1927).