大規模多目的非線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法と環境システムへの応用

矢野　均

1．まえがき

現実社会の複雑な意思決定状況を反映させた数学モデルは、数多くの制約式や決定変数により構成されることが多い。制約式や決定変数の数の大きさ、および目的関数や制約関数の複雑さが計算機の処理能力に比べて限界的であるような数理計画問題を「大規模」数理計画問題と呼び、このような問題を解くための数学的技法を大規模数理計画法[2,5,7,16]という。

実システムをモデル化した大規模数理計画問題は、多くの場合、なんらかの特別な構造をもっている。例えば、貯水池を持つ水力発電所や火力発電所における電力システムの経済運用問題[3,6]は、各発電所単位での種々の制約条件のもとで、燃料費等の経済的コストを最小にする「角型構造」の非線形計画問題として定式化されている。

近年、このような大規模数理計画問題の特殊構造に着目して、もとの問題（原問題）を複数個の小規模な部分問題に分解し、部分問題のみを取り扱うことにより、最終的に、原問題の最適解を導出するという分解手法[2,5,7,16]が種々提案されてきた。

一方、実システムを数学モデルとして定式化する際には、種々のあいまい性を避けることはできない。Slowinski[14]は、具体例として、水資源供給システム開発計画問題を取り上げ、大規模数理計画問題に対するファジィ理論[10,18]導入の必要性を指摘している。この水資源計画問題では、水供給および排水処理にかかる費用、将来の水不足から生ずるであろう損失に関わる信頼性の指標、さらに、水質汚染に関わる指標を目的関数として取り上げ、経済的・物理的制約条件のもとで、これらの目的関数を最小にするような多目的計画問題として定式化している。この際、対象とする開発計画が将来20年間にわたっているため、将来にわたる水需要量の変動、水供給および排水処理にかかる費用関数を構成する係数のあいまい性等が、定式化される問題に必然的に組み込まれることが指摘され、このようなあいまい性をファジィ集合として表現することにより、適切に実システムが記述できることが示されている。

このような状況において、著者ら[12,13,17]は、角型構造の大規模多目的非線形計画問題に焦点をあて、意思決定者が各目的関数に対してあいまいな目標（ファジィ目標）をもつという仮定のもとで，意思決定者の妥協解を求めるための２種類のファジィ大規模多目的非線形計画法を提案した。

(1)　意思決定者の選好構造がファジィ決定[1,10,18]に従うという前提条件のもとでの、双対分解手法に基づく２レベル最適化手法[12]。

(2)　意思決定者の選好構造が和オペレータ[10,15,18]に従うという前提条件のもとでの、資源割当分解手法に基づく２レベル[13]（および、３レベル[17]）最適化手法。

これらの手法では、意思決定者の選好構造がファジィ決定や和オペレータに従うという厳しい前提条件が必要であった。しかし、現実には、意思決定者の選好構造を陽に表現することはきわめて困難であるため、このような前提条件が満たされているかどうか検証することは難しい。

そこで、本論文では、角型構造の大規模多目的非線形計画問題に対して、意思決定者の陰に存在する選好関数を陽に表現することなく、意思決定者との対話を通じて、彼の判断のあいまい性を考慮した満足解を導出するための、「対話型」ファジィ意思決定手法を提案する。また、提案した手法を大阪市の環境管理計画問題[11]に適用し、その妥当性を検討する。

2．問題の定式化とファジィ双対分解アルゴリズム

本論文では，次のような角型構造の大規模多目的非線形計画問題（Large-Scale Multiobjective Nonlinear Programming Problem : LS-MONLP）を考える.

$$
\begin{array}{llllll}
\min & f_1(x) & \triangleq & f_{11}(x_1) & +f_{12}(x_2) & +\cdots & +f_{1p}(x_p) \\
\min & f_2(x) & \triangleq & f_{21}(x_1) & +f_{22}(x_2) & +\cdots & +f_{2p}(x_p) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\min & f_k(x) & \triangleq & f_{k1}(x_1) & +f_{k2}(x_2) & +\cdots & +f_{kp}(x_p)
\end{array}
$$

subject to

$$
\begin{array}{lllllll}
g_1(x) & \triangleq & g_{11}(x_1) & +g_{12}(x_2) & +\cdots & +g_{1p}(x_p) & \leqq 0 \\
g_2(x) & \triangleq & g_{21}(x_1) & +g_{22}(x_2) & +\cdots & +g_{2p}(x_p) & \leqq 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
g_m(x) & \triangleq & g_{m1}(x_1) & +g_{m2}(x_2) & +\cdots & +g_{mp}(x_p) & \leqq 0 \\
 & & h_1(x_1) & & & & \leqq 0 \\
 & & & h_2(x_2) & & & \leqq 0 \\
 & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & h_p(x_p) & \leqq 0
\end{array}
\qquad (1)
$$

$$x_l \in s_l \quad \subset R^{nl}, \quad l = 1, \cdots, p$$

ここで，$f_i(x)$, $i = 1, \cdots, k$ は互いに相競合する目的関数，$g_j(x)$, $j = 1, \cdots, m$ は結合制約式，$x \triangleq (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in R^n$ $(p \leqq n)$ は，決定変数ベクトルとする．また，$f_{il}(x_l)$，$g_{il}(x_l)$，$h_l(x_l)$，$i = 1, \cdots, k$, $j = 1, \cdots, m$, $l = 1, \cdots, p$ は，すべて、部分決定変数ベクトル x_l, $l = 1, \cdots, p$ に関する実数値関数とする．本論文を通して，以下の仮定を置く．

[仮定１]

制約関数 $h_l(x_l)$ は、$x_l \in S_l$ 上で２回連続的微分可能かつ、$\{x_l \in S_l \mid h_l(x_l) \leqq 0\}$, $l = 1, \cdots, p$ は，コンパクトかつ凸である．

以下において，集合 S を次のように定義する．

$$S \triangleq \prod_{l=1,\cdots,p} \left\{ x_l \in S_l \mid h_l(x_l) \leqq 0 \right\} \tag{2}$$

ここで，記号 Π は，直積を表わす．このとき，集合 S は，コンパクトかつ凸となることに注意しよう．

［仮定2］

制約集合 S 上で，目的関数 $f_i(x)$，$i = 1, \cdots, k$，および結合制約関数 $g_j(x)$，$j = 1, \cdots, m$ は，2回連続的微分可能な凸関数である．

LS-MONLP では、最適化すべき目的関数がベクトル値関数であるため、通常の最適解の代わりに、より消極的な解の概念として、ある目的関数を改善するためには少なくとも他のいずれかの目的関数を改悪せざるを得ない解、即ち、パレート最適解が定義されている。

［定義1］

LS-MONLP に対して、$f(x) \leq f(x^*)$（即ち、$f_i(x) \leqq f_i(x^*)$，$i = 1, \cdots, k$、かつ、ある $j \in \{1, \cdots, k\}$ に対して、$f_j(x) < f_j(x^*)$）となるような、$x \in X$ が存在しない時、$x^* \in X$ をパレート最適解という。

ここで、X は、次式で定義される LS-MONLP に対する実行可能集合である。

$$X \triangleq \left\{ x \in S \mid g_j(x) \leqq 0,\ j = 1, \cdots, m \right\} \tag{3}$$

LS-MONLP に対して，意思決定者の主観的判断のあいまい性を考慮すれば，意思決定者は，各目的関数 $f_i(x)$，$i = 1, \cdots, k$ に対してあいまいな目標（ファジィ目標）を持つものと考えられる．このようなファジィ目標は，メンバシップ関数 $\mu(f_i(x))$，$i = 1, \cdots, k$ により規定することができる．以下において，メンバシップ関数 $\mu_u(f_i(x))$ に関して，次の仮定をおく．

［仮定3］

意思決定者は，各目的関数に対するファジィ目標をメンバシップ関数で規定することができる．メンバシップ関数 $\mu(f_i(x))$，$i = 1, \cdots, k$ は，実行可能集合 $f_i(X)$ 上で，強意単調減少かつ2回連続的微分可能な凹関数である．

意思決定者により、各目的関数に対するメンバシップ関数 $\mu(f_i(x))$，$i = 1, \cdots, k$ が規定された後、意思決定者の満足解を導出するための一般化ファジィ意思決定問題を次式のように定式化することができる。

$$\max_{x \in X} \quad \mu_D(\mu_1(f_1(x)), \cdots, \mu_k(f_k(x))) \tag{4}$$

ここで、$\mu_D(\cdot)$ は、メンバシップ関数空間上における、意思決定者の選好構造を反映した統合関数である。

もし、このような関数 $\mu_D(\cdot)$ を陽に同定することができるのであれば、LS-MONLP は、統合関数 $\mu_D(\cdot)$ を最大化するという単一目的大規模非線形計画問題に置き換えることができる。しかし、一般に、統合関数 $\mu_D(\cdot)$ を同定することはきわめて困難であるので、その代わりに、対話的に解を更新することにより、最終的に意思決定者の満足解を導出するという、対話型手法が種々提案されている[10]。ここでは、坂和等により提案された対話型手法[9,10]を導入しよう。

意思決定者が、主観的に、彼の選好構造を反映させた各メンバシップ関数に対する希望水準（基準メンバシップ値という）：

$$\bar{\mu} = (\overline{\mu_1},\ \cdots,\ \overline{\mu_k}) \tag{5}$$

を設定すれば、彼の要求にある意味において近い解は、次のミニマックス問題を解くことにより得られる。

$$\min_{x \in X} \left\{ \max_{i=1,\cdots,k} \left\{ \overline{\mu_i} - \mu_i(f_i(x)) \right\} \right\} \tag{6}$$

この問題は，補助変数 $x_{p+1} \in R^1$ を導入すれば，次のような通常の非線形計画問題に変換できる.

$$\min_{(x_1,\cdots,x_p) \in S,\ x_{p+1} \in S_{p+1}(\bar{\mu})} \quad x_{p+1}$$

subject to

$$\begin{array}{llllll} & \multicolumn{5}{l}{\overline{\mu_i} - \mu_i(f_i(x)) \leqq x_{p+1},\ i = 1,\ \cdots,\ k} \\ g_1(x) \triangleq & g_{11}(x_1) & +g_{12}(x_2) & +\cdots & +g_{1p}(x_p) & \leqq 0 \\ g_2(x) \triangleq & g_{21}(x_1) & +g_{22}(x_2) & +\cdots & +g_{2p}(x_p) & \leqq 0 \\ \vdots \quad\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_m(x) \triangleq & g_{m1}(x_1) & +g_{m2}(x_2) & +\cdots & +g_{mp}(x_p) & \leqq 0 \end{array} \tag{7}$$

ここで，任意の $x \in X$ に対して、

$$-1 \leqq \overline{\mu_i} - \mu_i(f_i(x)) \leqq 1,\ i = 1,\ \cdots,\ k \tag{8}$$

であることから、補助変数 x_{p+1} の実行可能領域 $S_{p+1}(\bar{\mu})$ を、

$$S_{p+1}(\bar{\mu}) = [\max_{i=1,\cdots,k} \overline{\mu_i} - 1,\ \min_{i=1,\cdots,k} \overline{\mu_i}] \tag{9}$$

と設定している。

一方、仮定３より、実行可能集合 $f_i(X)$ 上で、メンバシップ関数の逆関数 $\mu_i^{-1}(\cdot)$ が常に存在していることから、上の問題(7)は，等価的に次のような非線形計画問題（以下では，原問題と呼ぶ）に変換できる.

<u>原問題：$P(\bar{\mu})$</u>

$$\min_{(x_1,\cdots,x_p) \in S,\ x_{p+1} \in S_{p+1}(\bar{\mu})} x_{p+1}$$

subject to

$$\begin{array}{llllll} & \multicolumn{5}{l}{f_i(x) - \mu_i^{-1}(\overline{\mu_i} - x_{p+1}) \leqq 0,\ i = 1,\ \cdots,\ k} \\ g_1(x) \triangleq & g_{11}(x_1) & +g_{12}(x_2) & +\cdots & +g_{1p}(x_p) & \leqq 0 \\ g_2(x) \triangleq & g_{21}(x_1) & +g_{22}(x_2) & +\cdots & +g_{2p}(x_p) & \leqq 0 \\ \vdots \quad\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_m(x) \triangleq & g_{m1}(x_1) & +g_{m2}(x_2) & +\cdots & +g_{mp}(x_p) & \leqq 0 \end{array} \tag{10}$$

ここで、仮定１，２，３より、この非線形計画問題は、凸計画問題となることに注意しよう。原問題 $P(\bar{\mu})$ の最適解とパレート最適解の間には次の関係が成立する[10]。

[定理１]

$x^* \in X$ が、LS-MONLP のパレート最適解であるための必要十分条件は、$x^* \in X$ が、ある基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i,\ i=1,\ \cdots,\ k$ に対する原問題 $P(\bar{\mu})$ の一意な最適解となることである。

ところで、本論文では、決定変数や結合制約式の数が非常に多く、そのままでは直接解くことが困難であるような「大規模」非線形計画問題を対象としている。このような大規模計画問題に対しては、問題の特殊構造に着目して、問題を複数個の小さな部分問題に分解することにより最終的に解を導出するという、分解手法が種々提案されてきている。本論文では、ブロック構造を有する LS-MONLP に対して有効な、Lasdon[7] により提案された双対分解手法を導入することにより、原問題 $P(\bar{\mu})$ の最適解を求めよう。

まず、原問題 $P(\bar{\mu})$ に対するラグランジュ関数を次のように構成することができる。

$$
\begin{aligned}
&L(\bar{\mu}: x,\ x_{p+1},\ \lambda,\ \pi)\\
&= x_{p+1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big\{ \sum_{l=1}^{m} f_{il}(x_l) - \mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - x_{P+1}) \Big\} + \sum_{j=1}^{m} \pi_j \Big\{ \sum_{l=1}^{p} g_{jl}(x_l) \Big\}\\
&= x_{p+1} + \sum_{l=1}^{p} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{il}(x_l) \Big\} - \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - x_{p+1}) \Big\} + \sum_{l=1}^{p} \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \pi_j g_{jl}(x_l) \Big\}\\
&= \sum_{l=1}^{p} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{il}(x_l) + \sum_{j=1}^{k} \pi_j g_{jl}(x_l) \Big\} + \Big\{ x_{p+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - x_{p+1}) \Big\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで，$\lambda = (\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k)$，$\pi = (\pi_1,\ \cdots,\ \pi_m)$ は，それぞれ，原問題 $P(\bar{\mu})$ の目的関数 $f_i(x)$ と結合制約関数 $g_j(x)$ に関する制約式に対応するラグランジュ乗数ベクトルを表わす.

この時、原問題 $P(\bar{\mu})$ に対応する双対問題 $D(\bar{\mu})$ は，次のように構成することができる.

双対問題：$D(\bar{\mu})$

$$
\max_{(\lambda,\ \pi) \in U(\bar{\mu})} w(\bar{\mu}: \lambda,\ \pi) \tag{12}
$$

ここで，双対関数 $w(\bar{\mu}: \lambda,\ \pi)$ と，その定義域 $U(\bar{\mu})$ は，次式で定義されている.

$$
\begin{aligned}
w(\bar{\mu}: \lambda,\ \pi) \triangleq \min L(\bar{\mu}: x,\ x_{p+1},\ \lambda,\ \pi)&\\
\text{subject to}&\\
x \in S,\ x_{p+1} \in S_{p+1}(\bar{\mu})&
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
U(\bar{\mu}) \triangleq \Big\{ (\lambda,\ \pi) \in R^{k+m} \mid \min w(\bar{\mu}: \lambda,\ \pi) \text{が存在する} \Big\} \tag{14}
$$

ところで，原問題 $P(\bar{\mu})$ において，仮定１から，決定変数の制約領域 $(x,\ x_{p+1}) \in S \times S_{p+1}(\bar{\mu})$ は，コンパクトな凸集合である．また，仮定２から，結合制約関数 $g_j(x)$，$j=1,\ \cdots,\ m$ は凸関数，さらに，仮定３より，$-\mu_i^{-1}(\cdot)$ が２回連続微分可能な凸関数であることから，メンバシップ関数に関わる制約関数

$$
f_i(x) - \mu_i^{-1}(\bar{\mu} - x_{p+1}),\ i=1,\ \cdots,\ k \tag{15}
$$

も，２回連続的微分可能かつ凸関数となる.

従って，もし原問題 $P(\bar{\mu})$ の目的関数 x_{p+1} の強凸性が保証されるならば，対応する双対問題

に対して、Lasdonの双対分解手法[7]を直接適用することができる。そこで，目的関数の強凸性を保証するために，原問題$P(\bar{\mu})$の目的関数に拡張項を加えた次のような問題について考えよう．

修正された原問題：$P'(\bar{\mu})$

$$\min_{(x_1,\cdots,x_p)\in S,\ x_{p+1}\in S_{p+1}(\bar{\mu})} \quad x_{p+1}+\rho x_{p+1}^2$$

subject to

$$f_i(x)-\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i-x_{p+1})\leqq 0,\ i=1,\ \cdots,\ k \tag{16}$$

$$\begin{array}{lllllll} g_1(x) & \triangleq & g_{11}(x_1) & +g_{12}(x_2) & +\cdots & +g_{1p}(x_p) & \leqq 0 \\ g_2(x) & \triangleq & g_{21}(x_1) & +g_{22}(x_2) & +\cdots & +g_{2p}(x_p) & \leqq 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_m(x) & \triangleq & g_{m1}(x_1) & +g_{m2}(x_2) & +\cdots & +g_{mp}(x_p) & \leqq 0 \end{array}$$

ここで，$\rho>0$は，十分に小さな正数で，ρx_{p+1}^2の項が存在するために，修正された原問題$P'(\bar{\mu})$の強凸性が保証されている．しかも，ρは十分小さな正数であるので，修正された原問題$P'(\bar{\mu})$の最適解は，もとの問題$P(\bar{\mu})$の近似解とみなせることに注意しよう．

修正された原問題$P'(\bar{\mu})$に対応するラグランジュ関数は，(11)式と同様にして、次式で与えられる．

$$L'(\bar{\mu}:x,\ x_{p+1},\ \lambda,\ \pi)$$
$$=\sum_{l=1}^{p}\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_{il}(x_l)+\sum_{j=1}^{k}\pi_j g_{jl}(x_l)\right\}+\left\{x_{p+1}+\rho x_{p+1}^2-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i-x_{p+1})\right\} \tag{17}$$

原問題$P(\bar{\mu})$に対する双対問題$D(\bar{\mu})$の場合と同様にして，修正された原問題$P'(\bar{\mu})$に対する双対問題$D'(\bar{\mu})$は，次式で定義される．

修正された双対問題$D'(\bar{\mu})$

$$\max_{(\lambda,\pi)\in U'(\bar{\mu})} w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi) \tag{18}$$

ここで，双対関数$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$と，$(\lambda,\ \pi)$の定義域$U'(\bar{\mu})$は，次式で定義されている．

$$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)\triangleq\min L'(\bar{\mu}:x,\ x_{p+1},\ \lambda,\ \pi)$$
$$\text{subject to} \tag{19}$$
$$x\in S,\ x_{p+1}\in S_{p+1}(\bar{\mu})$$

$$U'(\bar{\mu})\triangleq\left\{(\lambda,\ \pi)\in R^{k+m}\mid \min w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)\text{が存在する}\right\} \tag{20}$$

仮定1，2，3のもとで，修正された原問題$P'(\bar{\mu})$と双対問題$D'(\bar{\mu})$に関して，以下の定理が成立する[7]。

［定理2］

仮定1，2，3が成立するとき，修正された双対問題$D'(\bar{\mu})$の双対関数 $w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$の定義域$U'(\bar{\mu})$は，次式で与えられ，双対関数$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$は，$U'(\bar{\mu})$上で凹関数となる．

$$U'(\bar{\mu})=\left\{(\lambda,\ \pi)\in R^{k+m}\mid\lambda\geqq 0,\ \pi\geqq 0\right) \tag{21}$$

[定理3]

仮定1，2，3のもとで，修正された双対問題$D'(\bar{\mu})$の双対関数$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$は，任意の$(\lambda,\ \pi)\in U'(\bar{\mu})$上で微分可能で，偏微分係数は次式で与えられる．

$$\frac{\partial w'}{\partial \lambda_i}=\sum_{l=1}^{p} f_{il}(x_l)-\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i-x_{p+1}),\ i=1,\ \cdots,\ k \tag{22}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial \pi_j}=\sum_{l=1}^{p} g_{jl}(x_l),\ i=1,\ \cdots,\ k \tag{23}$$

[定理4]

仮定1，2，3のもとで，修正された双対問題$D'(\bar{\mu})$の最適解を$(\lambda^*,\ \pi^*)\geqq 0$とする．このとき，$(\lambda^*,\ \pi^*)$に対する式(19)の最小化問題の最適解$(x^*,\ x_{p+1}^*)\in S\times S_{p+1}(\bar{\mu})$は，修正された原問題$P'(\bar{\mu})$の最適解である．

定理2，3，4から明らかなように，ラグランジュ乗数ベクトル$(\lambda,\ \pi)$をパラメータとする双対関数$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$の最適解は、その定義域(式(21))上で ラグランジュ乗数ベクトル$(\lambda,\ \pi)$を，現在値から偏微分係数ベクトルの方向（式(22), (23)）へ適当なステップ幅で逐次更新することにより，改善してゆくことができる。しかも、得られた最適解は、修正された原問題$P'(\bar{\mu})$の最適解と一致している。

ところで、修正された双対問題$D'(\bar{\mu})$において、ラグランジュ乗数ベクトル$(\lambda,\ \pi)$を固定したとき、双対関数$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$は決定変数$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p,\ x_{p+1})$に関して加法的に分離可能となり、以下のような$p+1$個の部分問題に分解できる．

部分問題$A_l(\lambda,\ \pi)$の場合　($1\leqq l\leqq p$の場合)

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_{il}(x_l)+\sum_{j=1}^{k}\pi_j g_{jl}(x_l)\right\} \tag{24}$$

subject to

$$h_l(x_l)\leqq 0,\ x_l\in S_l$$

部分問題$A_{p+1}(\bar{\mu}:\lambda)$　($l=p+1$の場合)

$$\min\left\{x_{p+1}+\rho x_{p+1}^2-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i-x_{p+1})\right\} \tag{25}$$

subject to

$$x_{p+1}\in S_{p+1}(\bar{\mu})$$

即ち、固定されたラグランジュ乗数ベクトル$(\lambda,\ \pi)$に対する双対関数$w'(\bar{\mu}:\lambda,\ \pi)$の値は、$p+1$個の部分問題を解くことにより得られる目的関数の総和として求められる．

以上より、修正された原問題$P'(\bar{\mu})$の最適解$x^*\in X$を求めるための2レベル最適化アルゴリズムを次のように構成することができる。

[アルゴリズム1]

[ステップ1]

$t_1=1$ とし，ラグランジュ乗数ベクトルの初期値 $(\lambda^{t_1}, \pi^{t_1}) \geqq 0$ を適当に設定する．

［ステップ 2］

十分小さな $\rho>0$ に対して，$p+1$ 個の部分問題 $A_l(\lambda^{t_1}, \pi^{t_1})$, $l=1, \cdots, p$, $A_{p+1}(\bar{\mu}:\lambda^{t_1})$ を解き，得られた解を，$x_l(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}, \pi^{t_1})$, $l=1, \cdots, p+1$, とする．以下では簡単のため，$x^{t_1}(\bar{\mu})=(x_1(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}, \pi^{t_1}), \cdots, x_k(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}, \pi^{t_1}))$, $x^{t_1}_{p+1}(\bar{\mu})=x_{p+1}(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}, \pi^{t_1})$ とおく．

［ステップ 3］

双対関数 $w'(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}, \pi^{t_1})=L'(\bar{\mu}:x^{t_1}(\bar{\mu}), x^{t_1}_{p+1}(\bar{\mu}), \lambda^{t_1}, \pi^{t_1})$ の値を部分問題 $A_l(\lambda^{t_1}, \pi^{t_1})$, $l=1, \cdots, p$, $A_{p+1}(\bar{\mu}:\lambda^{t_1})$ の各目的関数値の総和として求め，双対関数の探索方向を次式により決定する．

$$
d(\lambda_i^{t_1})=\begin{cases}\dfrac{\partial w'}{\partial \lambda_i^{t_1}}=\sum_{l=1}^{p} f_{il}(x^{t_1})-\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i-x^{t_1}_{p+1}) \; ; \lambda_i^{t_1}>0, \; i=1, \cdots, k \\ \max\left\{0, \dfrac{\partial w'}{\partial \lambda_i^{t_1}}\right\} \; ; \lambda_i^{t_1}=0, \; i=1, \cdots, k\end{cases}
$$

$$
d(\pi_j^{t_1})=\begin{cases}\dfrac{\partial w'}{\partial \pi_j^{t_1}}=\sum_{l=1}^{p} g_{jl}(x^{t_1})-\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i-x^{t_1}_{p+1}) \; ; \pi_j^{t_1}>0, \; j=1, \cdots, m \\ \max\left\{0, \dfrac{\partial w'}{\partial \pi_j^{t_1}}\right\} \; ; \lambda_i^{t_1}=0, \; j=1, \cdots, m\end{cases}
$$

［ステップ 4］

ステップ 3 で決定された探索方向 $d(\lambda^{t_1})=(d(\lambda_1^{t_1}), \cdots, d(\lambda_k^{t_1}))$, $d(\pi^{t_1})=(d(\pi_1^{t_1}), \cdots, d(\pi_k^{t_1}))$, に対して，次の一次元探索問題を解き最適解を $\alpha^{t_1} \geqq 0$ とする．

$$
\max_{\alpha \geqq 0} \quad w'(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}+\alpha d(\lambda^{t_1}), \pi^{t_1}+\alpha d(\pi^{t_1})) \tag{26}
$$

subject to

$$
\lambda^{t_1}+\alpha d(\lambda^{t_1}) \geqq 0, \; \pi^{t_1}+\alpha d(\pi^{t_1}) \geqq 0
$$

この一次元探索問題も，対応する部分問題 $A_l(\lambda^{t_1}+\alpha d(\lambda^{t_1}), \pi^{t_1}+\alpha d(\pi^{t_1}))$, $A_{p+1}(\bar{\mu}:\lambda^{t_1}+\alpha d(\lambda^{t_1}))$ を繰り返し解くことにより求める．

［ステップ 5］

$\alpha^{t_1} \approx 0$ ならば終了．そうでなければ，$\lambda^{t_1+1}=\lambda^{t_1}+\alpha^{t_1} d(\lambda^{t_1})$, $\pi^{t_1+1}=\pi^{t_1}+\alpha^{t_1} d(\pi^{t_1})$, $t_1=t_1+1$ として，ステップ 2 へもどる．

以上より、アルゴリズム 1 を用いれば、意思決定者が主観的に設定した基準メンバシップ値 $\bar{\mu}$ にある意味で近い解 $x^* \in X$（正確には、原問題 $P(\bar{\mu})$ の最適解の近似値）が得られることがわかった。しかし、残念ながら、定理 1 から明らかなように、最適解が一意でなければ、$x^* \in X$ のパレート最適性は保証できない。そこで、最適解 $x^* \in X$ に対して、次のパレート最適性のテスト問題を解く必要がある。

パレート最適性のテスト問題：$T(x^*)$

$$
\max_{(x_1, \cdots, x_p) \in S, \; (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)=0} \quad \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \tag{27}
$$

subject to

$$
\begin{array}{lclclcl}
f_1(x)+\epsilon_1 & \triangleq & f_{11}(x_1) & +\cdots & +f_{1p}(x_p)+\epsilon_1 & = & f_1(x*) \\
f_2(x)+\epsilon_2 & \triangleq & f_{21}(x_1) & +\cdots & +f_{2p}(x_p)+\epsilon_2 & = & f_2(x*) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
f_k(x)+\epsilon_k & \triangleq & f_{k1}(x_1) & +\cdots & +f_{kp}(x_p)+\epsilon_k & = & f_k(x*) \\
g_1(x) & \triangleq & g_{11}(x_1) & +\cdots & +g_{1p}(x_p) & \leqq & 0 \\
g_2(x) & \triangleq & g_{21}(x_1) & +\cdots & +g_{2p}(x_p) & \leqq & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
g_k(x) & \triangleq & g_{k1}(x_1) & +\cdots & +g_{kp}(x_p) & \leqq & 0
\end{array}
$$

この問題 $T(x*)$ に対しても、アルゴリズム１と全く同様にして、双対分解手法に基づくアルゴリズムを構成することができることに注意しよう。

3．トレードオフ比と対話型意思決定手法

さて、意思決定者が主観的に設定した基準メンバシップ値 $\bar{\mu}$ に対してアルゴリズム１（および、パレート最適性のテスト問題(式(27))を適用すれば、基準メンバシップ値 $\bar{\mu}$ にある意味で近いパレート最適解が求められる。ここで、意思決定者は、現在のパレート最適解に満足するか、そうでなければ、基準メンバシップ値を更新することにより、新たなパレート最適解を求める必要がある。意思決定者が基準メンバシップ値を更新する際の有効な情報として、メンバシップ関数間のトレードオフ比が考えられる。

以下において、原問題 $P(\bar{\mu})$ は、次の３つの条件を満たす一意な最適解 $x* \in X$ をもつものと仮定する[(4)]。

[仮定４]

$x* \in X$ は、２次の最適性の十分条件を満たす。

[仮定５]

$x* \in X$ は、１次独立制約想定を満たす。

[仮定６]

$x* \in X$ は、狭義の相補性を満たす。

この時、感度分析における基本的な存在定理[(4)]が成立する。

[定理５]

原問題 $P(\bar{\mu})$ は、仮定４，５，６を満たす一意な最適解 $x* \in X$ と、対応するラグランジュ乗数 λ_i^*, $i=1, \cdots, k$ をもつものとする。このとき、適当なゼロの近傍上のパラメータ $\rho \in N(0) \cap R_+^1$ に対して、$x(0)=x^*$, $\lambda_i(0)=\lambda_i^*$, $i=1, \cdots, k$ であるような連続的微分可能な関数 $x(\rho)$ および $\lambda_i(\rho)$, $i=1, \cdots, k$ が存在する。さらに、$x(\rho)$ および $\lambda_i(\rho)$, $i=1, \cdots, k$ は、それぞれ、パラメータ $\rho \in N(0) \cap R_+^1$ に対する修正された原問題 $P\prime(\bar{\mu})$ の一意な最適解と対応

するラグランジュ乗数であり、仮定４，５，６を満たしている。

一方、原問題$P(\bar{\mu})$の最適解$x^* \in X$と、対応するラグランジュ乗数λ_i^*, $i=1, \cdots, k$に対して、目的関数間のトレードオフ比は次の定理で与えられる[10]。

［定理６］

ある基準メンバシップ値$\bar{\mu}$に対して、$x^* \in X$を原問題$P(\bar{\mu})$の一意な最適解とし、$x^* \in X$は、仮定４，５，６を満たすものと仮定する。また、原問題$P(\bar{\mu})$の制約式

$$f_i(x) - \mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - x_{p+1}) \leqq 0,\ i=1, \cdots, k \tag{28}$$

は、すべて活性（即ち、等式制約として成立）とし、対応するラグランジュ乗数を、λ_i^*, $i=1, \cdots, k$とする。この時、最適解$x^* \in X$における目的関数間のトレードオフ比は、次式で与えられる。

$$-\frac{\partial f_i(x^*)}{\partial f_1(x^*)} = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_i^*},\ i=2, \cdots, k \tag{29}$$

定理５と定理６の式(29)から、パラメータρが十分小さい正数であるとき、修正された原問題$P'(\bar{\mu})$の最適解$x(\rho)$における目的関数間のトレードオフ比は、近似的に次式で与えられる。

$$-\frac{\partial f_1(x(\rho))}{\partial f_i(x(\rho))} \approx \frac{\lambda_i(\rho)}{\lambda_1(\rho)},\ i=2, \cdots, k \tag{30}$$

従って、チェーンルールより、最適解$x(\rho)$におけるメンバシップ関数間のトレードオフ比は、近似的に、次式で与えられる。

$$-\frac{\partial \mu_1(f_1(x(\rho)))}{\partial \mu_i(f_i(x(\rho)))} \approx \frac{\partial \mu_1(f_1(x(\rho)))}{\partial f_1(x(\rho))} \frac{\lambda_i(\rho)}{\lambda_1(\rho)} \left\{ \frac{\partial \mu_i(f_i(x(\rho)))}{\partial f_i(x(\rho))} \right\}^{-1},\ i=2, \cdots, k \tag{31}$$

以上より、意思決定者が主観的に基準メンバシップ値$\bar{\mu}$を設定すると、アルゴリズム１により、基準メンバシップ値にある意味で近いパレート最適解が求められ、得られた最適解に満足できない場合には、トレードオフ比の情報を参考にして基準メンバシップ値を更新するという、対話型アルゴリズムを以下のように構成することができる。このアルゴリズムは、前節の双対分解手法に基づくアルゴリズム（アルゴリズム１）の上位レベルのアルゴリズムとして位置づけられる。

［アルゴリズム２］

［ステップ１］

意思決定者は、各目的関数に対するメンバシップ関数を、仮定３の条件を満たすように、適切に決定する。

［ステップ２］

$t_2 = 1$とし、初期基準メンバシップ値を$\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_k) = (1, \cdots, 1)$に設定する。

［ステップ３］

設定された基準メンバシップ値$\bar{\mu}$に対して、修正された原問題$P'(\bar{\mu})$を構成し、アルゴリズム１とパレート最適性のテスト問題(式(27))を適用する。得られた最適解とラグランジュ乗数を

$x^{t_2}(\rho)$, $\lambda^{t_2}(\rho)=(\lambda_1^{t_2}(\rho),\ \cdots,\ \lambda_k^{t_2}(\rho))$ とし、メンバシップ関数間のトレードオフ比の近似値(31)を計算する。

［ステップ4］

意思決定者が現在の最適解に満足ならば終了する。そうでなければ、現在のメンバシップ値とトレードオフ比の情報を考慮して、基準メンバシップ値 $\bar{\mu}$ を更新し、$t_2=t_2+1$ として、ステップ3へもどる。

4．環境管理計画問題への応用

提案した対話型アルゴリズムに基づき，対応する計算機プログラムを FORTRAN 言語により開発した．本プログラムでは，アルゴリズム1における部分問題 $A_l(\cdot)$, $l=1,\ \cdots,\ p$, $A_{p+1}(\cdot)$ を解くために，Lasdon ら[8]の開発した，一般縮少勾配法に基づく非線形最適化プログラム (GRG2) をサブルーチンとして利用している．

このプログラムの有効性および妥当性を検討するために，仮想的な意思決定者のもとで、以下のような環境管理計画問題[11]に適用し検討を加えた。

ここで対象とする問題は、大阪市を対象地域として、環境要因としての COD(Chemical Oxygen Demand) 量および SO_2(Sulphur Dioxide) 量をできるだけ少なくしつつ、生産量を高めるという、以下のような3目的40変数の非線形計画問題である。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & f_1(K,\ L)=\sum_{j=1}^{20} A_j K_j^{1-b_j} L_j^{b_j}\\ \text{minimize} & f_2(K)=\sum_{j=1}^{20}(\omega_{1j}/k_j)K_j\\ \text{minimize} & f_3(K)=\sum_{j=1}^{20}(\omega_{2j}/k_j)K_j\end{array}\right\} \quad (32)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{20}(\gamma_{ij}/k_j)K_j \leqq \Gamma_i,\ i=1,\ 2 \quad (33)$$

$$q_2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{20} K_j\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{20} L_j\right) \leqq q_1 \quad (34)$$

$$\alpha K_{j0} \leqq K_j \leqq \beta K_{j0} \quad j=1,\ \cdots,\ 20 \quad (35)$$

$$\alpha' L_{j0} \leqq L_j \leqq \beta' L_{j0} \quad j=1,\ \cdots,\ 20 \quad (36)$$

ただし、$K=(K_1,\ \cdots,\ K_{20})$, $L=(L_1,\ \cdots,\ L_{20})$．

ここで用いられている記号は以下の通りである。

j ：産業($j=1,\ \cdots,\ 20$)．産業の分類を表1に示す。

K_j ：産業 j の資本金（有形固定資産総額）

K_{j0} ：産業 j の現状（1975年）の資本金

L_j ：産業 j の労働者数

L_{j0} ：産業 j の現状（1975年）の労働者数

ω_{ij} ：産業 j の単位出荷額（百万円）当たりの COD 量($i=1$)および SO_2 量($i=2$)

γ_{ij} ：産業jの単位出荷額（百万円）当たりの土地（$i=1$）の要求量および水（$i=2$）の要求量

k_j ：産業jの単位出荷額（百万円）当たりの資本金（資本係数）

Γ_i ：土地（$i=1$）および水（$i=2$）の上限値

q_i ：全体の資本集約度（総資本金と総労働者数の比）の上限値（$i=1$）および下限値（$i=2$）

表1　産業の分類

コード	産業	コード	産業
1	食料品	11	なめし皮
2	繊維	12	窯業・土石
3	衣服	13	鉄鋼
4	木材	14	非鉄金属
5	家具	15	金属製品
6	パルプ・紙	16	機械
7	出版・印刷	17	電気機器
8	化学	18	輸送機器
9	石油・石炭	19	精密機器
10	ゴム製品	20	その他

A_j, b_j ：生産関数のパラメータ

α, β, α', β' ：資本と労働の移動に対する摩擦を示すパラメータ

目的関数f_1はCobb-Douglas型の生産関数であり、目的関数f_2およびf_3は、各々、水質汚濁を示すCOD量および大気汚染を示すSO_2量を表している。制約式(33)は土地と水の要求量に対する制約、制約式(34)は全体の資本集約度に対する制約、制約式(35), (36)は資本と労働に対する制約を表す。また、便宜上、制約式(33)−(36)を満たす決定変数領域を、$D(K, L)$で表す。

モデルに用いられたデータは次の通りである。即ち、$\Gamma_1=232200$，$\Gamma_2=200000$，$q_1=1.8$，$q_2=0.9$，$\alpha=\alpha'=0.903$，$\beta=\beta'=1.070$．さらに、パラメータA_j, b_j, k_j, ω_{ij}, γ_{ij}の値は、それぞれ、表2および表3に示されている。

この3目的非線形計画問題に対して，仮想的な意思決定者は，各目的関数f_1, f_2, f_3に対して，メンバシップ関数を，それぞれ，$\mu_1(f_1)=(f_1-4800000)/220000$，$\mu_2(f_2)=1-(f_2-141000)/8000$，$\mu_3(f_3)=1-(f_3-102000)/4000$と設定したものとする．このとき，意思決定者が主観的に基準メンバシップ値$\bar{\mu}=(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$を設定すれば、$\bar{\mu}=(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$にある意味で近いパレート最適解は、次の修正された原問題$P'(\bar{\mu})$を解くことにより得られる。

$$\min_{(K,L)\in D(K,L)\quad x_{41}\in S_{41}(\bar{\mu})} x_{41}+\rho x_{41}^2 \tag{37}$$

subject to

$$-\sum_{j=1}^{20} A_j K_j^{1-b_j} L_j^{b_j} + (220000(\bar{\mu}_1-x_{41})+4800000) \leqq 0 \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{20} (\omega_{1j}/k_k) K_j - (149000-8000(\bar{\mu}_2-x_{41})) \leqq 0 \tag{39}$$

表2　A_j, b_j and k_j の計算値

産業	A_j	b_j	k_j
1	10.9000	0.1145	0.1195
2	8.6200	0.1391	0.1160
3	15.3900	0.1566	0.0716
4	6.1000	0.1779	0.1599
5	9.9900	0.1723	0.0926
6	5.4600	0.1540	0.1868
7	7.2200	0.2291	0.1824
8	7.9100	0.1294	0.1400
9	6.7300	0.1479	0.1735
10	9.5200	0.1737	0.1125
11	15.2200	0.1445	0.0670
12	6.1300	0.1865	0.1926
13	6.4900	0.1216	0.1746
14	8.1800	0.0870	0.1077
15	6.8500	0.1981	0.1486
16	7.4300	0.2000	0.1659
17	9.6700	0.1588	0.1020
18	7.3600	0.1841	0.1491
19	7.0000	0.2107	0.1394
20	8.4700	0.1677	0.1228

$$\sum_{j=1}^{20}(\omega_{2j}/k_j)K_j-(106000-4000(\bar{\mu}_3-x_{41}))\leqq 0 \quad (40)$$

ここで，$x_{41}\in R^1$ は補助変数、$S_{41}(\bar{\mu})$ は(9)式に基づいて設定される。また、ここでは、拡張パラメータ $\rho=0.01$ と設定した。

この原問題 $P\prime(\bar{\mu})$ に対応するラグランジュ関数は、次式で与えられる。

$$(\bar{\mu}:K,\ L,\ x_{41},\ \lambda)=\left\{x_{41}+\rho x_{41}^2\right\}$$
$$+\lambda_1\left\{-\sum_{j=1}^{20}A_jK_j^{1-b_j}L_j^{b_j}+(220000(\bar{\mu}_1-x_{41})+4800000)\right\}$$
$$+\lambda_2\left\{\sum_{j=1}^{20}(\omega_{1j}/k_j)K_j-(149000-8000(\bar{\mu}_2-x_{41}))\right\}$$
$$+\lambda_3\left\{\sum_{j=1}^{20}(\omega_{2j}/k_j)K_j-(106000-4000(\bar{\mu}_3-x_{41}))\right\} \quad (41)$$

表3　ω_{ij}, γ_{ij} の計算値

産業	COD	SO_2	土地	水
1	0.07875	0.00822	0.0244	0.0407
2	0.03111	0.02235	0.0718	0.1292
3	0.03110	0.02235	0.0219	0.0072
4	0.00142	0.00076	0.1024	0.0324
5	0.00142	0.00076	0.0244	0.0121
6	0.21680	0.06751	0.0487	0.1564
7	0.07133	0.05218	0.0105	0.0154
8	0.07133	0.05218	0.0429	0.0599
9	0.03466	0.01505	0.1461	0.0212
10	0.02592	0.00413	0.0553	0.0549
11	0.02592	0.00413	0.0468	0.0542
12	0.00198	0.07963	0.1087	0.0617
13	0.00587	0.02136	0.0773	0.0562
14	0.00084	0.03055	0.0354	0.0373
15	0.00116	0.00778	0.0589	0.0293
16	0.00083	0.00340	0.0464	0.0129
17	0.00105	0.00243	0.0235	0.0133
18	0.00073	0.00116	0.0702	0.0267
19	0.00367	0.00228	0.0451	0.0324
20	0.00864	0.00228	0.0354	0.0258

ここで、$\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ は制約式(38)－(40)に対応するラグランジュ乗数ベクトルを表す。

このラグランジュ関数は、20種類の産業の資本金と労働者数を５つごとに分割すれば、次のような５つの副ラグランジュ関数の総和として表現できる。

$$L(\bar{\mu}:K,\ L,\ x_{41},\ \lambda)\ \triangleq\ \sum_{l=1}^{4}L_l(K_l,\ L_l,\ \lambda)+L_5(\bar{\mu}:x_{41},\ \lambda) \quad (42)$$

ここで、

$$L_l(K_l,\ L_l,\ \lambda)=\lambda_1\left\{-\sum_{j=5l-4}^{5l}A_jK_j^{1-b_j}L_j^{b_j}\right\}+\lambda_2\left\{\sum_{j=5l-4}^{5l}(\omega_{1j}/k_j)K_J\right\}+\lambda_3\left\{\sum_{j=5l-4}^{5l}(\omega_{2j}/k_j)K_J\right\},$$
$$l=1,\ \cdots,\ 4 \quad (43)$$

$$L_5(\bar{\mu}:x_{41},\ \lambda)$$
$$=\left\{x_{41}+\rho x_{41}^2\right\}+\lambda_1\left\{220000(\bar{\mu}-x_{41})+4800000\right\}$$
$$-\lambda_2\left\{149000-8000(\bar{\mu}_2-x_{41})\right\}-\lambda_3\left\{106000-4000(\bar{\mu}_3-x_{41})\right\} \quad (44)$$

以下では、５つの副ラグランジュ関数に対応して５つの部分問題を構成し、それぞれを繰り返し解くことにより修正された原問題 $P\prime(\bar{\mu})$ の最適解を求めるという、本論文で提案したアルゴリズムの適用結果を説明しよう。ただし、数値計算の段階でスケール変換のため、等価的に、修正された原問題 $P\prime(\bar{\mu})$ における目的関数(37)を100000倍、制約式(38)の両辺を0.1倍、制約式(40)の両辺を４倍した後、適用している。

まず、アルゴリズム２のステップ２により、初期基準メンバシップ値を $\bar{\mu}=(1,\ 1,\ 1)$ と設定した後、ステップ３で、アルゴリズム１に制御が移る。アルゴリズム１の計算結果を表４に示す。

この時、アルゴリズム1の100回目のイテレーションにおけるメンバシップ関数値は、

$(\mu_1(f_1),\ \mu_2(f_2),\ \mu_3(f_3)) = (0.5324,\ 0.5467,\ 0.5095)$,

また、メンバシップ関数間のトレードオフ比の近似値は、

$(-\partial\mu_2(f_2)/\partial\mu_1(f_1),\ -\partial\mu_3(f_3)/\partial\mu_1(f_1)) = (2.6027,\ 1.4746)$

となった。ちなみに、基準メンバシップ値$\bar{\mu} = (1,\ 1,\ 1)$に対して、修正された主問題を直接解くと、最適目的関数値は、47471.0となり、100回目のイテレーションにおける最適目的関数値$w' = 47448.18$とほぼ完全に一致している。

アルゴリズム2のステップ4において、仮想的な意思決定者は、たとえメンバシップ関数$\mu_1(f_1)$を若干犠牲にしようとも、メンバシップ関数$\mu_2(f_2)$と$\mu_3(f_3)$を改善しようと考え、基準メンバシップ値を、$(\bar{\mu}_1,\ \bar{\mu}_2,\ \bar{\mu}) = (0.5,\ 0.6,\ 0.55)$に更新した。この基準メンバシップ値に対して、アルゴリズム1が適用され、表5のような結果を得た。

以下、同様にして、仮想的な意思決定者は、基準メンバシップ値を、$(\bar{\mu}_1,\ \bar{\mu}_2,\ \bar{\mu}) = (0.48,\ 0.62,\ 0.57)$に更新し、表6のような結果を得て満足解に到達した。

仮想的な意思決定者の対話過程を表7にまとめる。また、イテレーション3で得られた意思決定者の満足解における決定変数の値を表8にまとめる。表8は、仮想的な意思決定者の選好構造を反映した資本と労働の最適配分として解釈できる。この表において、初期値(1975年の値)と比べて、各産業の資本金では、(4)木材、(5)家具、(10)ゴム製品、(11)なめし皮、(15)金属製品、(16)機械、(17)電気機器、(18)輸送機器、(19)精密機器、が増加、逆に、(1)食料品、(2)繊維、(3)衣服、(6)パルプ・紙、(7)出版・印刷、(8)化学、(9)石油・石炭、(12)窯業・土石、(13)鉄鋼、(14)非鉄金属、が減少していることがわかる。この結果から、仮想的な意思決定者は、環境要因を

表4　$\bar{\mu} = (1,\ 1,\ 1)$に対する計算結果

回 数	1	10	50	100
λ_1	1.	3.146594	2.214044	2.201512
λ_2	1.	1.472381	2.482316	2.469542
λ_3	1.	1.137103	2.011521	2.048222
f_1	4975555.	4971065.	4924407.	4917126.
f_2	148672.1	148753.5	144676.1	144626.2
f_3	104773.2	104337.1	104143.6	103962.2
w'	32160.59	37444.24	47396.43	47448.18

表5　$(\bar{\mu}_1,\ \bar{\mu}_2,\ \bar{\mu}) = (0.5,\ 0.6,\ 0.55)$に対する計算結果

回 数	1	10	50	100
λ_1	1.	2.130984	2.127030	2.110737
λ_2	1.	2.696139	2.762973	2.848888
λ_3	1.	1.964640	1.947314	1.925757
f_1	4971065.	4897775.	4914791.	4913368.
f_2	148753.5	144494.1	144610.2	144600.5
f_3	104337.1	103481.6	103904.1	103868.7
w'	-20574.39	892.47	924.54	958.95

表6　$(\bar{\mu}_1,\ \bar{\mu}_2,\ \bar{\mu}) = (0.48,\ 0.62,\ 0.57)$に対する計算結果

回 数	1	10	50	100
λ_1	1.	2.110999	2.095144	2.070295
λ_2	1.	2.847410	2.927297	3.044545
λ_3	1.	1.952374	1.907128	1.877850
f_1	4971065.	4879969.	4908512.	4900976.
f_2	148753.5	144373.1	144567.3	144515.9
f_3	104337.1	103041.3	103748.0	103560.9
w'	-20081.71	1006.27	1146.91	1210.79

表7　対話過程

回 数	1	2	3
$\bar{\mu}_1$	1.	0.5	0.48
$\bar{\mu}_2$	1.	0.6	0.62
$\bar{\mu}_3$	1.	0.55	0.57
$\mu_1(f_1)$	0.5324	0.5153	0.4590
$\mu_2(f_2)$	0.5467	0.5500	0.5605
$\mu_3(f_3)$	0.5095	0.5328	0.6098
$-\partial\mu_2/\partial\mu_1$	2.6027	2.0375	1.8700
$-\partial\mu_3/\partial\mu_1$	1.4746	1.5071	1.5159

悪化させる可能性の高い産業の資本金を抑え、逆に，比較的環境要因を悪化させる可能性の少ない産業の資本金を上昇させることを望んでいるものと考えられる。

表 8　資本と労働の最適配分

産業	1975年度		最適配分	
	資本	労働	資本	労働
1	31653	22527	28579	25783
2	22981	17521	20749	18740
3	10114	18088	9132	19347
4	13479	8237	14417	8810
5	8581	8275	9178	8851
6	36996	16041	33403	17157
7	75595	43494	68254	47008
8	86440	34161	78047	36539
9	2004	827	1809	885
10	5161	4195	5520	4487
11	3764	5512	4026	5896
12	15538	8472	14029	9026
13	108036	28964	101793.4	30980
14	28750	10147	25958	10853
15	75339	52749	80583	56420
16	81541	52358	87216	56002
17	30677	26736	32812	28597
18	32687	18597	38813	19891
19	4577	4148	4896	4437
20	26266	22701	28094	24280

4. あとがき

本論文では，角型構造の大規模多目的非線形計画問題に対して，意思決定者の主観的判断のあいまい性を考慮した満足解を導出するための、双対分解手法[7]に基づく対話型ファジィ満足化手法を提案した。提案した手法では、意思決定者が主観的にメンバシップ空間上における基準メンバシップ値を設定すれば、基準メンバシップ値にある意味で近いパレート最適解とメンバシップ関数間のトレードオフ比（近似値）が得られる。意思決定者はこれらの情報を考慮して、満足できる解が見つかるまで、基準メンバシップ値の更新を繰り返すことになる。また、提案した手法を大阪市の環境管理計画問題に適用し、その妥当性を検討した。ここで取り上げた応用例は、問題の規模が小さいため汎用計算機を用いて直接解くことが可能であるが[11]、特殊構造を有する現実の大規模計画問題を取り扱う場合には、本論文の手法が、計算効率の側面からきわめて有効になるものと思われる。

文　献

(1) Bellmann, R.E. and Zadeh, L.A.: “Decision Making in a Fuzzy Environment”, Management Sci., **17**, pp. 141-164 (1970).

(2) Dantzig, G.B. and Wolfe, P.: “The Decomposition Algorithm for Linear Programming”, Econometrica, **29**, pp. 767-768, (1961).

(3) 深尾毅、豊田淳一： “電力系統へのコンピュータの応用”，産業図書，(1972).

(4) 福島雅夫： “非線形最適化の理論”，産業図書，(1980).

(5) Haimes, Y.Y., Tarvainen, K., Shima, T. and Thadathil, J.: “Hierachical Multiobjective Analysis of Large-Scale Systems”, Hemisphere Publishing Corporation, (1989).

(6) 小舘英寛：“利水システム運用における計画問題”，システムと制御、第22巻第３号 pp. 138-145 (1978).

(7) Lasdon, L.S.（志水清孝　訳）： “大規模システムの最適化理論”，日刊工業新聞社，(1973).

(8) Lasdon, L.S., Waren, A.D. and Ratner, M.W.: “GRG2 User’s Guide”, Technical Memorandum, University of Texas, (1980).

(9) 坂和正敏，湯峯亨，矢野均："多目的非線形計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法"，システムと制御，**28**，pp. 575-582，(1984).

(10) Sakawa,M.: *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York, (1993).

(11) Sakawa, M. and Yano, H.: "An Interactive Fuzzy Satisficing Method Using Augmented Minimax Problems and Its Applicationto Environmental Systems", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15, pp.720-729, (1985).

(12) Sakawa, M. and Yano, H.: "A Fuzzy Dual Decomposition Method forLarge-Scale MultiobjectiveNonlinear Programming Problems", Fuzzy Sets and Systems, 67, pp. 19-27, (1994).

(13) Sakawa, M., Yano, H. and Sawada, K.: "A Primal Decomposition Method for Multiobjective Structured Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Goals", Cybernetics and Systems : An International Journal, **26**, pp. 413-426 (1995).

(14) Slowinski, R.: "A Multicriteria Fuzzy Linear Programming Method for Water Supply SystemDevelopment Planning", Fuzzy Sets and Systems, **19**, pp. 217-237 (1986).

(15) Sommer, G. and Pollatschek, M.A.: "A Fuzzy Programming Approach to an Air Pollution Regulation Problem", in R. Trappl., G. J. Klir and L. Ricciardi (eds.): Progress in Cybernetics and Systems Research, pp. 303-323, Hemisphere, (1978).

(16) 田村担之："大規模システムーモデリング・制御・意志決定ー"，昭晃堂，(1986).

(17) 矢野均、坂和正敏、澤田一哉："大規模多目的非線形計画問題に対する３レベルファジィ満足化手法",電子情報通信学会論文誌、Vol.J78-A, No.7, pp. 811-823, (1995).

(18) Zimmermann, H.-J.: "*Fuzzy Set Theory and Its Applications* (*Second Edition*)", Kluwer Academic Publishers (1991).