

# 対数型効用関数の効用無差別価格について

宮原孝夫\*

## 1 序

資産の評価尺度として, 効用無差別価格は多くの優れた性質を持っている [1, 2, 3]. しかし, 実際に効用無差別価格を有効に利用できる効用関数としては, 指数型効用関数しか使われていない.

効用無差別価格による評価が, それの元になっている効用関数によりどのように異なった特性を持つか検討することは興味ある検討課題である. 特に経済理論で典型的効用関数として使われている3つの型の効用関数に対して効用無差別価格の議論が出来れば, 大いに意味があるう.

指数型効用関数に対しては, 効用無差別価格は自然に定義可能である. これに対して, 対数型効用関数, 冪型効用関数は, 変数の定義域が  $(0, \infty)$  であることより, 効用無差別価格は自然には定義できない.

そこで, 何らかの工夫を施すことにより, 効用無差別価格が妥当な形で定義可能になるように出来ないかを検討した. 1つの着眼点は, 金融資産の価格が正值であることに留意して, 金融資産の評価に限定して考えることである. その結果, 対数型効用関数については意味のある効用無差別価格を定義できるように工夫することが出来た. 本稿ではこの結果を述べる.

注. 冪型の効用関数についても対数型効用関数についてと類似の形で変形した定義を与えることは出来るが, 効用無差別価格を議論するには適した形にはなっていない. (§4.1 参照)

---

\* 名古屋市立大学名誉教授  
Email: yoshio\_m@zm.commuja.jp

## 2 対数型効用関数とその効用無差別価格

### 2.1 対数型効用関数の定義

我々は効用無差別価格を使った理論展開を目指している。その立場から、効用関数  $u(x)$  に対して次の基準化の要件を満たすことを要請する。

1. 定義域は、 $x=0$  を含んだ区間。(広いことが望ましく、 $(-\infty, \infty)$  がベスト.)
2. 単調増加関数で、凹関数である。
3.  $u(0)=0$ .
4.  $u'(0)=1$ .
5.  $u''(0)=\alpha$ . ( $\alpha$  はリスク回避度を示すパラメーターで、 $0 < \alpha < 1$ .)

これらの要請を満たすように対数型効用関数を修正して、次のように定義する。

**Definition 2.1** 次式で定義される関数

$$u_{\log}^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \log(1+\alpha x), & \alpha > 0, (x > -\frac{1}{\alpha}), \\ x, & \alpha = 0, (-\infty < x < \infty). \end{cases} \quad (1)$$

をリスク回避度  $\alpha (\geq 0)$  の対数型効用関数と呼ぶ。

**Remark 2.1**  $\alpha$  がリスク回避度と結びつくことは後に示す。

### 2.2 対数型効用関数の性質

**Proposition 2.1** 次の結果が容易に分かる。

$$u_{\log}^{(\alpha)}(0) = 0. \quad (2)$$

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} u_{\log}^{(\alpha)}(x) = x, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_{\log}^{(\alpha)}}{\partial x}(0) = 1. \quad (4)$$

**Remark 2.2** 冪型の効用関数の場合には、上のような性質を持つように変形して扱うことは出来そうにない。

微分して、次の結果を得る。

$$u_{\log}^{(\alpha)'}(x) = \frac{1}{1+\alpha x} > 0, \quad x > -\frac{1}{\alpha}, \quad (5)$$

$$u_{\log}^{(\alpha)''}(x) = -\frac{\alpha}{(1+\alpha x)^2} < 0, \quad x > -\frac{1}{\alpha}. \quad (6)$$

これより  $u_{\log}^{(\alpha)}(x)$  が単調増加で上に凸 (凹関数) であることが分かる。

[絶対的リスク回避度]

$$R_{abs}(x) = -\frac{u_{\log}^{(\alpha)''}(x)}{u_{\log}^{(\alpha)'}(x)} = \frac{\alpha}{1+\alpha x}, \quad (7)$$

$$R_{abs}(0) = \alpha, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R_{abs}(x) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{x \downarrow -\frac{1}{\alpha}} R_{abs}(x) = \infty. \quad (10)$$

[相対的リスク回避度]

$$R_{rel}(x) = \frac{\alpha x}{1+\alpha x}, \quad (11)$$

$$R_{rel}(0) = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R_{rel}(x) = 1, \quad (13)$$

$$\lim_{x \downarrow -\frac{1}{\alpha}} R_{rel}(x) = -\infty. \quad (14)$$

**Remark 2.3** これらの式 (特に式 (8)) より,  $\alpha$  がリスク回避度と関連していることが分かる.

### 3 対数型効用関数の効用無差別価格

#### 3.1 効用無差別価格の定義

上で見た  $u_{\log}^{(\alpha)}(x)$  の性質から, 非負の  $X$  に対して  $u_{\log}^{(\alpha)}(x)$  による効用無差別価格を定義できる可能性がある.

**Definition 3.1** 確率変数  $X$  に対して, 次の  $v$  についての方程式

$$E\left[u_{\log}^{(\alpha)}(X-v)\right] = E\left[\frac{1}{\alpha} \log(1+\alpha(X-v))\right] = 0 \quad (15)$$

が解を持つとき, その解を  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$  と書き, 危険回避度  $\alpha$  の対数型効用関数  $u_{\log}^{(\alpha)}(\cdot)$  に対する  $X$  の効用無差別価格効用無差別価格 (略して, 危険回避度  $\alpha$  の対数型効用無差別価格) と呼ぶ. この解  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$  が存在するための条件を調べてみる.

#### 3.2 対数型効用無差別価格の存在

$X$  の値域の下限を  $a$  とする.  $a \geq 0$  である. 式 (15) の左辺が計算できるためには,

$$1+\alpha(a-v) \geq 0 \quad (16)$$

でなければならない. したがって,  $v$  の動き得る範囲は

$$v \leq a + \frac{1}{\alpha} \quad (17)$$

である。また、(15)の左辺は $v$ の単調減少関数である。したがって、方程式(15)が上の $v$ の範囲内に解を持つためには

$$E\left[\frac{1}{\alpha} \log\left(1 + \alpha\left(X - \left(a + \frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right] \leq 0 \quad (18)$$

でなければならない。こうして、次の結果が得られた。

**Theorem 3.1** 危険回避度 $\alpha$ の対数型効用関数 $u_{\log}^{(\alpha)}(x)$ に対して非負の $X$ の効用無差別価値 $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$ が定まるためには条件

$$E\left[\log\left(1 + \alpha\left(X - \left(a + \frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right] \leq 0 \quad (19)$$

が満たされなくてはならない。ここに $a$ は $X$ の値域の下限である。

**Remark 3.1** 式(19)の左辺は、 $-\infty$ になることも許している。

この定理の条件(効用無差別価値の存在のための必要条件)を手掛かりにして、効用無差別価値の存在のための十分条件を求めることを試みる。 $X$ は非負としているので、

$$Z = \log(X), \quad (x = e^z) \quad (20)$$

と置く。

以下、 $a=0$ と想定して検討する。(注. 対数正規分布をはじめ、多くの例でこうなっている。) このとき、条件式(19)は

$$E\left[\log\left(1 + \alpha\left(X - \frac{1}{\alpha}\right)\right)\right] \leq 0 \quad (21)$$

となる。この式の左辺は

$$\begin{aligned} E\left[\log\left(1 + \alpha\left(X - \frac{1}{\alpha}\right)\right)\right] &= E[\log(\alpha e^Z)] \\ &= E[\log(\alpha) + Z] \\ &= \log(\alpha) + E[Z] \end{aligned} \quad (22)$$

と変形されるので、条件式(21)は

$$E[Z] \leq -\log(\alpha) \quad (23)$$

と同値となる。このことより、次の結果が得られる。

**Theorem 3.2** 非負の $X = e^Z$ が次の条件

$$E[Z] \leq -\log(\alpha) \quad (24)$$

を満たしており、さらに

$$f(v) = E[\log(1 + \alpha(X - v))] \quad (25)$$

が  $0 \leq v \leq \frac{1}{\alpha}$  で  $v$  の連続関数となっているものとする。このとき、危険回避度  $\alpha$  の対数型効用関数  $u_{\log}^{(\alpha)}(x)$  に対して  $X$  の効用無差別価値  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$  が  $0 \leq v \leq \frac{1}{\alpha}$  の中に定まる。

(証明)  $X$  は非負と仮定されているので

$$f(0) = E[\log(1 + \alpha X)] \geq 0, \quad (26)$$

である。仮定の式 (24) より、すでに上で見たように

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq 0 \quad (27)$$

である。また、定理の仮定より、関数  $f(v)$  は  $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$  上で連続であるので、 $f(v) = 0$  なる点が区間  $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$  内に存在する。 (Q.E.D.)

**Remark 3.2** 効用無差別価格の方程式 ( $f(v) = 0$ ) を解析的に解くことは一般に困難であろう。したがって、解を求めるにはモンテカルロシミュレーションを使っての計算になろう。

**Example 3.1** 幾何ブラウン運動

$$S_t = e^{\sigma W_t + \mu t} \quad (28)$$

の場合について調べてみる。

$$E[\sigma W_T + \mu T] = \mu T \quad (29)$$

であるので、*Theorem 3.2* より、

$$\mu T \leq -\log(\alpha) \quad (30)$$

すなわち

$$\mu \leq -\frac{1}{T} \log(\alpha) \quad (\text{or } \alpha \leq e^{-\mu T}) \quad (31)$$

であれば  $S_T$  の効用無差別価格が区間  $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$  の中に求まることになる。

### 3.3 効用無差別価格の定義の拡張

ここまで、非負の  $X$  に対して  $u_{\log}^{(\alpha)}(x)$  による効用無差別価格を検討してきた。そこでの議論を拡張して、 $X$  の値域が下に有界、すなわち  $X$  の値域の下限  $a$  が  $a > -\infty$  を満たしているならば  $X$  の効用無差別価格  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$  を次のようにして定義することが考えられる。

**Definition 3.2**  $X$  の値域の下限  $a$  が  $a > -\infty$  を満たしているものとする。このとき  $Y = X - a$  と置くと  $Y \geq 0$  であり、 $Y$  の効用無差別価格  $v_{\log}^{(\alpha)}(Y)$  が定義可能である。 $v_{\log}^{(\alpha)}(Y)$  が定まった場合に、 $X$  の効用無差別価格を  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$  を

$$v_{\log}^{(\alpha)}(X) = v_{\log}^{(\alpha)}(Y) + a \quad (32)$$

により定義する。

このような定義の拡張は、価値尺度の持つべき性質の一つであるマネタリ性に照らして、妥当なものであると言えよう。

**Corollary 3.1**  $Y = X - a$  が *Theorem 3.2* の条件を満たしていれば、 $X$  の効用無差別価格  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$  が  $v_{\log}^{(\alpha)}(X) = v_{\log}^{(\alpha)}(Y) + a$  として定まる。

## 4 いくつかの注意事項と今後の検討課題

### 4.1 冪型効用関数について

冪型効用関数についても対数型効用関数に対して行ったと同様の議論は可能である。

**Definition 4.1** 次式で定義される関数

$$u_{pow}^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, (x \geq -1), \\ x, & \alpha = 0, (-\infty < x < \infty). \end{cases} \quad (33)$$

をリスク回避度  $\alpha$  の冪型効用関数と呼ぶ。

こう定義した冪型効用関数についても、対数型効用関数に対してと同様に、その性質や効用無差別価格を定義し存在定理も示せる。しかしながら、実際に適用できる対象が非常に狭くなり、実用的な意味はほとんど無いように思える。

### 4.2 確実性等価

効用無差別価格に類似の概念として、「確実性等価」がある。理論的な意味では「効用無差別価格」の方が優れていると言えるが、「確実性等価」には定義が分かり易く適用法も容易であるという利点がある。

[対数型効用関数の確実性等価]

効用無差別価格と共に確実性等価も価値尺度として使われることがある。ここで確実性等価について見ておくことにしよう。

対象とする  $X$  の値域は  $u_{\log}^{(\alpha)}(\cdot)$  の定義域  $\left(-\frac{1}{\alpha}, \infty\right)$  内にあるものとする。対数型効用関数に対する  $X$  の確実性等価  $c_{\log}^{(\alpha)}(X)$  は  $c$  についての次の方程式

$$E[u_{\log}^{(\alpha)}(X)] = u_{\log}^{(\alpha)}(c) \quad (34)$$

の解である。これを解いて、

$$c_{\log}^{(\alpha)}(X) = \frac{1}{\alpha} (e^{E[\log(1+\alpha X)]} - 1) \quad (35)$$

を得る.

[冪型効用関数の確実性等価]

対象とする  $X$  の値域は  $u_{pow}^{(\alpha)}(\cdot)$  の定義域  $[-1, \infty]$  内にあるものとする. 冪型効用関数に対する  $X$  の確実性等価  $c_{pow}^{(\alpha)}(X)$  は  $c$  についての次の方程式

$$E[u_{pow}^{(\alpha)}(X)] = u_{pow}^{(\alpha)}(c) \quad (36)$$

の解である. これを解いて,

$$c_{pow}^{(\alpha)}(X) = E[(X+1)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \quad (37)$$

を得る.

### 4.3 価値尺度の比較

資産の評価尺度としての価値尺度にはいくつかのものがある. 効用関数との関連で考えられてきたものとしては, 次のようなものがある.

1. MV (= Mean Variance)
2. RSVM  $U^{(\alpha)}(X) (= v_{exp}^{(\alpha)}(X) = c_{exp}^{(\alpha)}(X))$
3.  $v_{\log}^{(\alpha)}(X)$
4.  $c_{\log}^{(\alpha)}(X)$
5.  $c_{pow}^{(\alpha)}(X)$

「これらの中で, 一般的には RSVM  $U^{(\alpha)}(X)$  が最も優れている」というのが筆者のかねてからの主張であるが, それは主としてプロジェクト評価の立場からの見解であり, 資産の種類によっては他の尺度で見た方が適切な場合も有りうるであろう. 上にあげたような尺度の相互比較を行い, それらの特徴や適した適用対象を検討してみることは今後の課題である.

### 参考文献

- [1] 宮原孝夫 (2006), 「期待効用理論に基づくプロジェクトの価値評価法」, *Discussion Papers in Economics, Nagoya City University*, No. 446. 1-21.
- [2] Y. Miyahara (2010), 'Risk-Sensitive Value Measure Method for Projects Evaluation,' *Journal of Real Options and Strategy*, Vol. 3, No. 2, 185-204.
- [3] 宮原孝夫 (2011), 「リスク鋭感的価値尺度によるプロジェクトの評価」, *Discussion Papers in Economics, Nagoya City University*, No. 531, 1-29.
- [4] 宮原孝夫 (2013), 「規模のリスクとその評価」, *オイコノミカ* (名古屋市立大学・経済学研究科紀要), 第 49 巻, 2013.3.15, pp. 45-56.
- [5] 宮原孝夫 (2017), 「[研究ノート] プロジェクトの総合的評価理論『リスク鋭感的価値尺度法』」, *リアルオプションと戦略*, Vol. 9, No. 2, pp. 1-95.