[学術論文]

多目的ミニマックス型 m 人巡回セールスマン問題の定式化と複数フロアのブランド配列問題への応用

m-Traveling Salesman Problems with Multiple Minmax Objectives and Its Application to Brand Goods Arranging Problems

矢野 均・茨木 智・三村 健・倉田 陽右
Hitoshi Yano, Satoru Ibaraki, Ken Mimura, Yosuke Kurata

概要

本稿では，高級ブランド品リユースショップの POS データを活用した店舗の売り上げ拡大のための施策として，複数フロアにおけるブランド配列問題を取り上げる．即ち，POS データから各種ブランド商品間の同時購買情報であるサポート値とリフト値を抽出し，同時購買情報に基づくブランド商品の配列順序を求める．まず，1 フロアを想定した場合におけるサポート値に基づくブランド商品の配列順序とリフト値に基づくブランド商品の配列順序のみならず，サポート値とリフト値を同時に考慮した場合のブランド商品の配列順序を導出するための多目的巡回セールスマン問題を定式化する．次に，3 フロアを想定した場合におけるサポート値とリフト値を同時に考慮した場合のブ

ランド商品の配列順序を導出するための多目的ミニマックス型 m 人巡回セールスマン問題を定式化する．現実の POS データに対して上記問題を定式化し，対応する混合整数計画問題を解き，それぞれのブランド商品の最適配列順序について比較・検討する．

キーワード：多目的計画問題;m 人巡回セールスマン問題; パレート最適解; アソシエーション分析

1　はじめに

近年，低コストで大容量の POS データの取得・蓄積が容易に行えることから，同時購買のパターンを発見するためのアソシエーション分析が活発に行われてきている [1, 2, 3]．特に，アソシエーション分析に基づく同時購買を考慮した店内レイアウト問題については，多次元尺度法に基づくアプローチ [1] に対して，巡回セールスマン問題 (TSP) としての定式化よるアプローチが提案されてきている [4, 5]．鈴木ら [4] の方法では，アソシエーション分析の重要な 2 つの指標（サポート値とリフト値）のいずれかを用いて，1 フロアの店舗において同時購入の割合の総和を最大にするような商品最適配置を決定する．しかし，マーケティング分析においては，これらの指標を同時に考慮して商品配置を決定したい場合や，複数フロアの店舗において同時購入の割合の総和を最大にするような商品最適配置を決定したい場合が考えられる．

一方，巡回セールスマン問題 (TSP) は，訪問すべき都市と都市間の距離が与えられたとき，全ての都市を 1 回だけ通って出発した都市に戻る巡回路の中で総距離が最小の順番を求める問題である [6, 7, 8, 9]．これに対して，複数のセールスマンを含む m 人巡回セールスマン問題 (mTSP) は，仮想的な頂点を追加することにより通常の巡回セールスマン問題 (1TSP) に帰着することができる [10]．mTSP に対しては，通常は，複数のセールスマンの移動距離の均等化を目指すのが望ましいとの観点からミニマックス型目的関数を含む mTSP を解くアルゴリズムに関する研究が活発に行われてきており，比較的短時間で精度の高い近似解を導出するための発見的解法や厳密解を導出するためのアルゴリズム [11, 12]，アントコロニー法に基づく近似解法 [13] が提案されてきている．さらに，TSP において，複数の互いに相競合する目的を同時にバランス良く最適化するための多目的巡回セールスマン問題 (MTSP) に関する研究も行われてきている [14, 15].

このような状況において，本稿では，高級ブランド品リユースショップの POS データを活用した店舗の売り上げ拡大のための施策として，店舗内の複数フロアにおけるブランド配列問題について検討する．まず，2 年分の会員 ID 付き POS データの中から，男女別に各カテゴリ (ジュエリー，ウォッチ，バッグ，ファッション) でブランド毎の売上合計が上位の計 55 品目を抽出する．抽出したデータの会員 ID をキーとしてアソシエーション分析を行い，ブランド間の期間内併売傾向の指標としてサポート値とリフト値を算出する．これらの指標を用いて，

1)　1 フロア 1 指標に基づくブランド配列問題

2)　1 フロア 2 指標に基づくブランド配列問題

3)　3 フロア 2 指標に基づくブランド配列問題

を，それぞれ，巡回セールスマン問題，2 目的巡回セールスマン問題，2 目的 m 人巡回セールスマン問題として定式化し，対応する大規模混合整数計画問題を最適化ソフト NUOPT[16] を用いて解き，得られた配列順序について比較・検討する．

2　ブランド配列問題の定式化

本稿では，アソシエーション分析の結果からサポート値行列とリフト値行列 (55×55 係数行列) を算出し，これらを同一会員によるブランド間の併売パターンに関する情報として採用する．ここで，リフト値とサポート値の定義は以下の通りである．

$$\text{サポート値} = \frac{|\ X \cap Y\ |}{|\ A\ |} \quad \text{リフト値} = \frac{\frac{|X \cap Y|}{|X|}}{\frac{|Y|}{|A|}}$$

ここで，A はすべての客の集合，X, Y はあるブランドを購入した客の集合を表す．サポート値は二つのブランドが客全体の中でどれくらい同時に購入されているかを表す指標，リフト値はどちらかの商品を購入した客の中でどれくらい同時購買されているかを表す指標と解釈することができる．POS データから算出したこれらの指標値を，それぞれ，$d_{ij}^S, d_{ij}^L, i, j = 1, \cdots, 55$ で表す．

本節では，まず，サポート値行列あるいはリフト値行列を用いて，1 フロアのブランド配列問題を定式化し，それらの最適解情報を用いて，サポート値目的関数とリフト値目的関数に関するファジィ目標 [17] を表すメンバシップ関数のパラメータを設定する．

2.1　1 フロア 1 指標に基づくブランド配列問題の定式化

まず，対象店舗を 1 フロアと想定して，サポート値あるいはリフト値が最大になるような 55 品目のブランド配列問題を，以下の巡回セールスマン問題 P1[4, 5, 6] として定式化する．

$$\max \left(\sum_{i,j \in U_1, i \neq j} d_{ij}^L x_{ij} \right) \text{ あるいは } \left(\sum_{i,j \in U_1, i \neq j} d_{ij}^S x_{ij} \right)$$

subject to

$$\sum_{i \in U_1, i \neq j} x_{ij} = 1, j \in U_1 \tag{1}$$

$$\sum_{j \in U_1, j \neq i} x_{ij} = 1, i \in U_1 \tag{2}$$

$$f_i - f_j + 54x_{ij} \leq 53, i, j \in V_1, i \neq j \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j \in U_1 \tag{4}$$

$$f_i \in \mathrm{R}^1, 1 \leq f_i \leq 54, i \in V_1 \tag{5}$$

ここで，添字集合 $U_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, \cdots, 55\}$, $V_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{2, \cdots, 55\}$ は各ブランドに対応しており，添字 $i, j = 1$ のブランドをスタート地点として固定する．x_{ij} は各ブランド i, j が

接続しているとき 1，そうでないとき 0 をとる 01 変数で，f_i は残りの 54 個のブランドの配置順序を表す連続変数を表す．

巡回セールスマン問題 P1 は混合整数計画問題 (01 変数 2970 個，連続変数 54 個，制約式 2972 個) となるが，本稿では，大量のデータを Excel シート上で取り扱うことが可能な商用最適化ソフト NUOPT[16] で解き，以下の最適解を得た．

$$d^L_{\max} \overset{\text{def}}{=} \max \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^L_{ij} x^*_{ij} = 541.364,$$
$$d^L_{\min} \overset{\text{def}}{=} \min \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^L_{ij} x^*_{ij} = 3.295,$$
$$d^S_{\max} \overset{\text{def}}{=} \max \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^S_{ij} x^*_{ij} = 20.698,$$
$$d^S_{\min} \overset{\text{def}}{=} \min \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^S_{ij} x^*_{ij} = 0.234$$

図 1 と図 2 に，2 つの指標に基づく 1 フロアの場合のブランド配列順序を示す[*1]．

2.2　1 フロア 2 指標に基づくブランド配列問題の定式化

前節では，サポート値目的関数あるいはリフト値目的関数を最大にするブランド配列順序を求めた．本節では，二つの指標値をバランス良く同時に最大化したブランド配列順序を求めるために，以下の 2 目的巡回セールスマン問題 P2 を考える．

$$\max \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^S_{ij} x_{ij} \tag{6}$$
$$\max \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^L_{ij} x_{ij} \tag{7}$$

subject to

制約式 (1), (2), (3), (4), (5)

P2 において，意思決定者はサポート値目的関数 (6) とリフト値目的関数 (7) に対して，ファジィ目標 [17] を持つと仮定し，これらのファジィ目標を以下の線形型メンバシップ関数により定義する．

$$\mu_S(z^S(\boldsymbol{x})) \overset{\text{def}}{=} \frac{z^S(\boldsymbol{x}) - d^S_{\min}}{d^S_{\max} - d^S_{\min}} \tag{8}$$
$$\mu_L(z^L(\boldsymbol{x})) \overset{\text{def}}{=} \frac{z^L(\boldsymbol{x}) - d^L_{\min}}{d^L_{\max} - d^L_{\min}} \tag{9}$$

[*1] 本来、各種ブランド名を具体的に表示すべきであるが、POS データをご提供頂いたリユースショップとの契約に基づき、具体的商品名の代わりにカテゴリ名と対応ブランドの通し番号のみを表示している．

順序	カテゴリ+ブランド	順序	カテゴリ+ブランド
0	バッグブランド_01	28	ファッションブランド_04
1	バッグブランド_08	29	ファッションブランド_13
2	バッグブランド_07	30	ファッションブランド_11
3	ウォッチブランド_15	31	ファッションブランド_14
4	ウォッチブランド_02	32	ファッションブランド_10
5	ウォッチブランド_11	33	ファッションブランド_02
6	ウォッチブランド_09	34	ファッションブランド_15
7	ウォッチブランド_12	35	ファッションブランド_05
8	ウォッチブランド_01	36	ファッションブランド_06
9	ジュエリーブランド_06	37	ファッションブランド_09
10	ジュエリーブランド_10	38	ファッションブランド_08
11	ジュエリーブランド_08	39	ファッションブランド_07
12	ジュエリーブランド_05	40	ファッションブランド_12
13	ジュエリーブランド_09	41	ファッションブランド_01
14	ジュエリーブランド_07	42	バッグブランド_15
15	ジュエリーブランド_04	43	バッグブランド_10
16	ウォッチブランド_05	44	バッグブランド_04
17	ウォッチブランド_14	45	バッグブランド_09
18	ウォッチブランド_07	46	バッグブランド_06
19	ウォッチブランド_10	47	ウォッチブランド_06
20	ウォッチブランド_13	48	ウォッチブランド_08
21	バッグブランド_13	49	ウォッチブランド_03
22	バッグブランド_12	50	ウォッチブランド_04
23	ファッションブランド_03	51	ジュエリーブランド_02
24	バッグブランド_05	52	ジュエリーブランド_01
25	バッグブランド_11	53	ジュエリーブランド_03
26	バッグブランド_03	54	バッグブランド_02
27	バッグブランド_14		

図 1　1 フロア・サポート値に基づくブランド配列順序

ここで，$d^S_{\max}, d^S_{\min}, d^L_{\max}, d^L_{\min}$ は前節で計算された各目的関数の最大値と最小値を表し，

$$z^L(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^L_{ij} x_{ij}$$

$$z^S(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j\in U_1, i\neq j} d^S_{ij} x_{ij}$$

とする．また，$\boldsymbol{x}$ は問題 P2 の全ての決定変数 $x_{ij}, i, j \in U_1$, $f_i, i \in V_1$ のベクトルを表すものとする．このとき，P2 は以下の 2 目的ファジィ計画問題 P3 に変換することができる．

$$\max \ \mu_L(z^S(\boldsymbol{x})) \tag{10}$$

$$\max \ \mu_S(z^L(\boldsymbol{x})) \tag{11}$$

subject to

制約式 (1), (2), (3), (4), (5)

順序	カテゴリ+ブランド	順序	カテゴリ+ブランド
0	バッグブランド_01	28	ウォッチブランド_03
1	バッグブランド_02	29	ウォッチブランド_04
2	バッグブランド_06	30	ジュエリーブランド_02
3	ウォッチブランド_06	31	ジュエリーブランド_01
4	ウォッチブランド_08	32	ジュエリーブランド_03
5	バッグブランド_09	33	バッグブランド_05
6	バッグブランド_10	34	ファッションブランド_03
7	バッグブランド_04	35	ファッションブランド_08
8	ウォッチブランド_11	36	ファッションブランド_09
9	ウォッチブランド_09	37	ファッションブランド_12
10	ウォッチブランド_12	38	ファッションブランド_07
11	ウォッチブランド_01	39	ファッションブランド_06
12	ジュエリーブランド_06	40	ファッションブランド_15
13	ジュエリーブランド_10	41	ファッションブランド_02
14	ジュエリーブランド_08	42	ファッションブランド_05
15	ジュエリーブランド_05	43	ファッションブランド_14
16	ジュエリーブランド_09	44	ファッションブランド_11
17	ジュエリーブランド_07	45	ファッションブランド_13
18	ジュエリーブランド_04	46	ファッションブランド_04
19	バッグブランド_07	47	ファッションブランド_10
20	バッグブランド_13	48	ファッションブランド_01
21	ウォッチブランド_05	49	バッグブランド_15
22	ウォッチブランド_07	50	バッグブランド_12
23	ウォッチブランド_14	51	バッグブランド_14
24	ウォッチブランド_02	52	バッグブランド_11
25	ウォッチブランド_15	53	バッグブランド_03
26	ウォッチブランド_10	54	バッグブランド_08
27	ウォッチブランド_13		

図 2　1 フロア・リフト値に基づくブランド配列順序

2 目的ファジィ計画問題 P3 を取り扱うために以下の M パレート最適解の概念を導入する．

定義 1

2 目的ファジィ計画問題 P3 において，もし，

$$\mu_S(z^S(\boldsymbol{x})) \geq \mu_S(z^S(\boldsymbol{x}^*)),$$
$$\mu_L(z^L(\boldsymbol{x})) \geq \mu_L(z^L(\boldsymbol{x}^*))$$

（ただし，どちらか一つの不等式について狭義の不等号が成立）であるような $\boldsymbol{x} \in X$ が存在しなければ，$\boldsymbol{x}^* \in X$ を P3 に対する M-パレート最適解であるという．ここで，X は P3 の全ての決定変数 $x_{ij}, i, j \in U_1$, $f_i, i \in V_1$ の実行可能集合を表すものとする．

意思決定者が P3 のメンバシップ関数 $\mu_S(\cdot), \mu_L(\cdot)$ に対して基準メンバシップ値 $(\hat{\mu}_L, \hat{\mu}_S)$[17] を設定すれば，基準メンバシップ値にミニマックスの意味で近い M パ

レート最適解は以下のミニマックス問題 P4 を解くことにより得られる [17].

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \lambda$$

subject to

$$\hat{\mu}_S - \mu_S \left(\sum_{i,j \in U_0, i \neq j} d_{ij}^S x_{ij} \right) \leq \lambda \tag{12}$$

$$\hat{\mu}_L - \mu_L \left(\sum_{i,j \in U_0, i \neq j} d_{ij}^L x_{ij} \right) \leq \lambda \tag{13}$$

制約式 (1), (2), (3), (4), (5)

ここで，Λ は以下で定義される閉区間を表す [19].

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} [\max(\hat{\mu}_S, \hat{\mu}_L) - 1, \max(\hat{\mu}_S, \hat{\mu}_L)] \in \mathrm{R}^1.$$

メンバシップ関数 (8),(9) が狭義単調増加であることから，ミニマックス問題 P4 の制約式 (12),(13) は次式に変換できる.

$$\mu_S^{-1}(\hat{\mu}_S - \lambda) \leq \sum_{i,j \in U_0, i \neq j} d_{ij}^S x_{ij}$$

$$\mu_L^{-1}(\hat{\mu}_L - \lambda) \leq \sum_{i,j \in U_0, i \neq j} d_{ij}^L x_{ij}$$

ミニマックス問題 P4 の最適解と M パレート最適解の間には以下の定理が成立する [17].

定理 1

(1)　もし $\boldsymbol{x}^* \in X$ がある基準メンバシップ値に対するミニマックス問題 P4 の一意な最適解であれば，$\boldsymbol{x}^* \in X$ は P3 の M パレート最適解である.

(2)　もし $\boldsymbol{x}^* \in X$ が P3 の M パレート最適解であれば，$\boldsymbol{x}^* \in X$ がミニマックス問題 P4 の最適解となるような基準メンバシップ値が存在する.

図 3 に，基準メンバシップ値を $(\hat{\mu}_L, \hat{\mu}_S) = (1, 1)$ と設定した場合のブランド配列順序を示す.

2.3　3 フロア 2 指標に基づくブランド配列問題の定式化

実際の店舗では，対象とする 55 品目のブランド商品を男女それぞれ 3 フロア毎に配列していることから，併売パターン情報に基づくブランド配列順序を自動的に 3 フロアに振り分けるような定式化が望ましい．また，購買されにくいものがまとめて置かれるフロアがあってはいけない（即ち，ある程度よく売れるブランド＋カテゴリを散らさなければならない）ので，各フロアの満足度を公平にする必要がある．このような観点から，本節では，サポート値とリフト値に基づいて，55 品目のブランドを 3 フロアに「可能な限り対等に」振り分けるために，以下の 2 目的ミニマックス型 m 人巡回セール

順序	カテゴリ+ブランド	順序	カテゴリ+ブランド
0	バッグブランド_01	28	ジュエリーブランド_08
1	バッグブランド_02	29	ジュエリーブランド_10
2	ウォッチブランド_11	30	ジュエリーブランド_06
3	ウォッチブランド_09	31	ウォッチブランド_01
4	バッグブランド_07	32	ウォッチブランド_12
5	ウォッチブランド_07	33	ファッションブランド_01
6	ウォッチブランド_14	34	バッグブランド_15
7	ウォッチブランド_05	35	バッグブランド_12
8	ウォッチブランド_10	36	ファッションブランド_03
9	ウォッチブランド_15	37	ファッションブランド_08
10	ウォッチブランド_02	38	ファッションブランド_09
11	ウォッチブランド_03	39	ファッションブランド_12
12	ウォッチブランド_08	40	ファッションブランド_07
13	ウォッチブランド_06	41	ファッションブランド_06
14	バッグブランド_04	42	ファッションブランド_05
15	バッグブランド_10	43	ファッションブランド_15
16	バッグブランド_09	44	ファッションブランド_02
17	バッグブランド_06	45	ファッションブランド_10
18	ジュエリーブランド_03	46	ファッションブランド_14
19	ジュエリーブランド_01	47	ファッションブランド_11
20	ジュエリーブランド_02	48	ファッションブランド_13
21	ウォッチブランド_04	49	ファッションブランド_04
22	ウォッチブランド_13	50	バッグブランド_14
23	バッグブランド_13	51	バッグブランド_05
24	ジュエリーブランド_07	52	バッグブランド_11
25	ジュエリーブランド_04	53	バッグブランド_03
26	ジュエリーブランド_09	54	バッグブランド_08
27	ジュエリーブランド_05		

図 3　1 フロア・2 指標に基づくブランド配列順序

スマン問題 P5 を定式化する（ここで，$m = 3$）[11, 12, 13, 18].

$$\max\left(\min_{k\in K}\sum_{i,j\in U_0,i\neq j} d^S_{ij}x_{ijk}\right)$$

$$\max\left(\min_{k\in K}\sum_{i,j\in U_0,i\neq j} d^L_{ij}x_{ijk}\right)$$

subject to

$$\sum_{k\in K}\sum_{j\in V_0} x_{0jk} = \sum_{k\in K}\sum_{i\in V_0} x_{i0k} = 3 \tag{14}$$

$$\sum_{j\in U_0} x_{ijk} = \sum_{h\in U_0} x_{hik} = y_{ik}, k \in K, i \in V_0 \tag{15}$$

$$\sum_{k\in K} y_{ik} = 1, i \in V_0 \tag{16}$$

$$f_{ijk} \leq 55x_{ijk}, f_{ijk} \geq 0, k \in K,\ i,j \in U_0, i \neq j \tag{17}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in V_0} f_{i0k} = 55,\ f_{0jk} = 0, k \in K, j \in V_0 \tag{18}$$

$$\sum_{j\in U_0} f_{ijk} - \sum_{h\in U_0} f_{hik} = y_{ik}, k \in K, i \in V_0 \tag{19}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, y_{ik} \in \{0,1\}, k \in K,\ i,j \in V_0 \tag{20}$$

ここで，添字集合 $K \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2,3\}$, $U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1,\cdots,55\}$, $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{1,\cdots,55\}$, 55 種類のブランド商品に対してスタート地点とする仮想的ブランド $i,j=0$ を追加している．x_{ijk} は各ブランド i,j がフロア k において接続しているとき 1，そうでないとき 0 をとる 01 変数で，y_{ik} はブランド i がフロア k に配置される場合 1，そうでない場合 0 をとる 01 変数，f_{ijk} はフロア k におけるブランド i からブランド j に接続する順番を表す連続変数である．

本節では，第 k フロアにおけるサポート値目的関数とリフト値目的関数

$$z_k^S(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j\in U_0, i\neq j} d_{ij}^S x_{ijk}, k \in K$$

$$z_k^L(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j\in U_0, i\neq j} d_{ij}^L x_{ijk}, k \in K$$

に対して，意思決定者はファジィ目標 [17] を持つと仮定し，これらのファジィ目標を以下の線形型メンバシップ関数により定義する．

$$\mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x})) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z_k^S(\boldsymbol{x}) - d_0^S}{d_1^S - d_0^S}, k \in K \tag{21}$$

$$\mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x})) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z_k^L(\boldsymbol{x}) - d_0^L}{d_1^L - d_0^L}, k \in K \tag{22}$$

ここで，55 品目のブランド商品を 3 フロアに分割することから，各メンバシップ関数のパラメータを $d_1^{L(S)} \stackrel{\text{def}}{=} d_{\max}^{L(S)}/2$, $d_0^{L(S)} \stackrel{\text{def}}{=} d_{\min}^{L(S)}/3$ と設定した．ただし，$d_{\max}^{L(S)}, d_{\min}^{L(S)}$ は第 2.1 節で計算された値を表す．また，$\boldsymbol{x}$ は P5 の全ての決定変数 $x_{ijk}, i,j \in U_0, k \in K$, $f_{ijk}, i,j \in U_0, k \in K$, $y_{ik}, i \in V_0, k \in K$ のベクトルを表すものとする．さらに，各フロア $(k=1,2,3)$ を対等に取り扱うために，$z_k^S(\boldsymbol{x}), k=1,2,3$ あるいは $z_k^L(\boldsymbol{x}), k=1,2,3$ に対するメンバシップ関数は同一とした．このとき，P5

は以下の 2 目的ファジィ計画問題 P6 に変換することができる．

$$
\begin{aligned}
&\max\left(\min_{k\in K}\mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x}))\right)\\
&\max\left(\min_{k\in K}\mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x}))\right)\\
&\text{subject to}\\
&\text{制約式 }(14),(15),(16),(17),(18),(19),(20)
\end{aligned}
$$

2 目的ファジィ計画問題 P6 を取り扱うために以下の MF パレート最適解の概念を導入する．

定義 2

2 目的ファジィ計画問題 P6 において，もし，

$$
\begin{aligned}
\mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x})) &\geq \mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x}^*)), k\in K,\\
\mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x})) &\geq \mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x}^*)), k\in K
\end{aligned}
$$

（ただし，少なくとも一つの不等式について狭義の不等号が成立）であるような $\boldsymbol{x}\in X$ が存在しなければ，$\boldsymbol{x}^*\in X$ を P6 に対する MF パレート最適解であるという．ここで，X は問題 P6 の全ての決定変数 $x_{ijk}, i,j\in U_0, k\in K$，$f_{ijk}, i,j\in U_0, k\in K$，$y_{ik}, i\in V_0, k\in K$ の実行可能集合を表すものとする．

P6 に対して意思決定者が基準メンバシップ値 $(\hat{\mu}_L,\hat{\mu}_S)$[17] を設定すれば，対応する MF パレート最適解は以下のミニマックス問題 P7 を解くことにより得られる [17].

$$
\begin{aligned}
&\min_{\lambda\in\Lambda}\lambda\\
&\text{subject to}\\
&\hat{\mu}_S-\min_{k\in K}\mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x}))\leq\lambda &(23)\\
&\hat{\mu}_L-\min_{k\in K}\mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x}))\leq\lambda &(24)\\
&\text{制約式 }(14),(15),(16),(17),(18),(19),(20)
\end{aligned}
$$

ミニマックス問題 P7 の制約式 (23),(24) は線形型メンバシップ関数 (21),(22) の狭義単調増加性より，等価的に次式に変換できる．

$$\mu_S^{-1}(\hat{\mu}_S-\lambda)\leq\sum_{i,j\in U_0,i\neq j}d_{ij}^S x_{ijk}, k\in K \tag{25}$$

$$\mu_L^{-1}(\hat{\mu}_L-\lambda)\leq\sum_{i,j\in U_0,i\neq j}d_{ij}^L x_{ijk}, k\in K \tag{26}$$

ミニマックス問題 P7 の最適解と MF パレート最適解の間には以下の定理が成立する [17].

定理 2

もし $\boldsymbol{x}^*\in X$, $\lambda^*\in\Lambda$ がある基準メンバシップ値に対するミニマックス問題 P7 の一意な最適解であれば，$\boldsymbol{x}^*\in X$ は P6 の MF パレート最適解である．

(証明) $\boldsymbol{x}^* \in X$ が P6 の MF パレート最適解でないと仮定する．このとき，

$$\mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x})) \geq \mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x}^*)), k \in K, \tag{27}$$
$$\mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x})) \geq \mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x}^*)), k \in K \tag{28}$$

（ただし，少なくとも一つの不等式について狭義の不等号が成立）であるような $\boldsymbol{x} \in X$ が存在する．メンバシップ関数 (21),(22) の狭義単調増加性より，制約式 (27),(28) は等価的に次式で表される．

$$z_k^S(\boldsymbol{x}) \geq z_k^S(\boldsymbol{x}^*), k \in K,$$
$$z_k^L(\boldsymbol{x}) \geq z_k^L(\boldsymbol{x}^*), k \in K$$

よって，制約式 (25),(26) から次式が成立する．

$$\mu_L^{-1}(\hat{\mu}_L - \lambda^*) \leq z_k^S(\boldsymbol{x}^*) \leq z_k^S(\boldsymbol{x}), k \in K$$
$$\mu_S^{-1}(\hat{\mu}_S - \lambda^*) \leq z_k^L(\boldsymbol{x}^*) \leq z_k^L(\boldsymbol{x}), k \in K$$

これは，$\boldsymbol{x}^* \in X$, $\lambda^* \in \Lambda$ がミニマックス問題 P7 の一意な最適解であることに反する．

定理 2 より，任意の基準メンバシップ値 $(\hat{\mu}_S, \hat{\mu}_L)$ を設定した場合のミニマックス問題 P7 の一意な最適解集合は MF パレート最適解集合の部分集合となる．MF パレート最適解集合の中で，可能な限りすべてのフロアのサポート値目的関数とリフト値目的関数に対する満足度を対等に改善するような MF パレート最適解が，ミニマックス問題 P7 の一意な最適解と解釈できる．

ここで，意思決定者が主観的に設定する基準メンバシップ値と，対応するミニマックス問題 P7 の最適解の関係について検討する．ミニマックス問題 P7 を解くことにより基準メンバシップ値 $(\hat{\mu}_S, \hat{\mu}_L)$ にミニマックスの意味で近い実行可能解 $\big(\min_{k\in K} \mu_S(z_k^S(\boldsymbol{x}))\big)$ と $\big(\min_{k\in K} \mu_L(z_k^L(\boldsymbol{x}))\big)$ を得ることができる．しかし，ミニマックス問題 P7 の制約式 (23),(24) の内部に $\min_{k\in K}$ が含まれているために，たとえば，基準メンバシップ値 $\hat{\mu}_S$ を基準メンバシップ値 $\hat{\mu}_L$ に比べて相対的に大きくすれば，各フロアにおけるサポート値の最大化を各フロアにおけるリフト値の最大化よりも重視すると同時に，各フロアにおけるサポート値のバランスを各フロアにおけるリフト値のバランスよりも重視するという意味になる．両方の基準メンバシップ値 $(\hat{\mu}_S, \hat{\mu}_L)$ を同じ値にすれば，各フロアにおけるサポート値とリフト値を同程度改善すると同時に，各フロアにおけるサポート値とリフト値のバランスを同程度とるという意味になる．即ち，二つの基準メンバシップ値 $(\hat{\mu}_S, \hat{\mu}_L)$ の大小は，各フロアにおけるサポート値やリフト値のバランスの度合いを反映する指標として解釈することができる．

ミニマックス問題 P7 は混合整数計画問題 (01 変数 9570 個，連続変数 9406 個，制約式 9799 個) となり，図 4 に基準メンバシップ値を $(\hat{\mu}_L, \hat{\mu}_S) = (1, 1)$ と設定した場合のブランド配列順序を示す．

2.4　3 種類のブランド配列問題の比較

1 フロアを想定したサポート値に基づくブランド配列問題の最適解（図 1 ）では，サポート値がブランド間の併売出現率の指標であるため，同じカテゴリが連続した配列と

フロア1：		フロア2：		フロア3：	
順序	カテゴリ+ブランド	順序	カテゴリ+ブランド	順序	カテゴリ+ブランド
1	ジュエリーブランド_07	1	ジュエリーブランド_01	1	ウォッチブランド_10
2	ジュエリーブランド_04	2	ジュエリーブランド_02	2	ウォッチブランド_13
3	バッグブランド_09	3	バッグブランド_14	3	バッグブランド_03
4	ウォッチブランド_01	4	ウォッチブランド_08	4	バッグブランド_11
5	ウォッチブランド_12	5	バッグブランド_08	5	バッグブランド_07
6	ファッションブランド_08	6	バッグブランド_05	6	ジュエリーブランド_08
7	ファッションブランド_07	7	ファッションブランド_03	7	ジュエリーブランド_10
8	バッグブランド_01	8	ファッションブランド_10	8	ジュエリーブランド_06
9	バッグブランド_02	9	ファッションブランド_11	9	バッグブランド_04
10	バッグブランド_12	10	ウォッチブランド_03	10	バッグブランド_10
11	バッグブランド_13	11	ウォッチブランド_04	11	ジュエリーブランド_09
		12	ファッションブランド_05	12	ジュエリーブランド_05
		13	ファッションブランド_15	13	ファッションブランド_12
		14	ファッションブランド_02	14	ファッションブランド_09
		15	バッグブランド_15	15	ファッションブランド_06
		16	ファッションブランド_01		
		17	バッグブランド_06		
		18	ウォッチブランド_06		
		19	ジュエリーブランド_03		
		20	ウォッチブランド_07		
		21	ウォッチブランド_05		
		22	ファッションブランド_14		
		23	ファッションブランド_13		
		24	ファッションブランド_04		
		25	ウォッチブランド_15		
		26	ウォッチブランド_02		
		27	ウォッチブランド_11		
		28	ウォッチブランド_09		
		29	ウォッチブランド_14		

図４　３フロア・２指標に基づくブランド配列順序

なっている．これに対して，１フロアを想定したリフト値に基づくブランド配列問題の最適解（図２）では，サポート値の場合に比べて，本質的結び付きの度合いの指標のため相対的にカテゴリが分散している．一方，１フロアを想定したサポート値とリフト値を同時に考慮したブランド配列問題の最適解（図３）では，単一指標を採用した場合に比べて，より複数のブランドおよびカテゴリ間の配列となっている．即ち，クロスブランド・カテゴリでの編集の枠組みが存在すると考えられる．更に，３フロアを想定し，かつ，サポート値とリフト値を同時に考慮したブランド配列問題の最適解（図４）では，各フロアの満足度が公平になる事を最優先にしているため，各フロアに複数のカテゴリとブランドが配列され，買い回り行動の促進が期待される．現状のフロア配置（カテゴリ別）を超えた新しいクロスブランド・カテゴリでの枠組みの可能性が考察される．

3　おわりに

本稿では，現実の高級ブランド品リユースショップの POS データを用いて，1 フロアを想定した場合におけるサポート値あるいはリフト値に基づくブランド商品配列問題を巡回セールスマン問題として，1 フロアを想定した場合におけるサポート値とリフト値を同時に考慮した場合のブランド商品配列問題を 2 目的巡回セールスマン問題として，更に，3 フロアを想定した場合におけるサポート値とリフト値を同時に考慮した場合のブランド商品配列問題を 2 目的ミニマックス型 m 人巡回セールスマン問題として定式化し，すべての混合整数計画問題を解き，得られた最適配列順序について比較検討を行った．2 種類の指標を同時に考慮した場合や 3 フロアを想定した場合に対しては，現状のフロア配置を超えたクロスブランド・カテゴリの新しい枠組みの存在が見られ，複数フロアのブランド配置における新たな知見が得られた．これらを活かし，より個性化・差別化された複数フロアのレイアウトプランに活用したい．今後は，ブランド別の面積とフロア面積，フロア毎のブランド数，同一フロアにしないブランドの組み合わせ等の現実に必要とされる種々の制約条件をモデルに組み込むことにより，より実態に即したブランド配置を得るための工夫を行う必要がある．

参考文献

[1] 中山厚穂：“POS データを活用した店舗内の売場配置の考察”，オペレーションズ・リサーチ, 48(2), pp.100–106 (2003)

[2] 石垣智徳; 小沢佳奈：“ 百貨店 POS データによる顧客の店舗内空間行動分析”，オペレーションズ・リサーチ, 50(3), pp.181–186 (2005)

[3] 裴明花, 谷口伸一, 原隆浩, 西尾章治郎：“ 重要な顧客層および相関ルール発見のための繰返し購買パターンを考慮した相関ルールマイニング”，情報処理学会論文誌, 47(12), pp.3352–3364 (2006)

[4] 鈴木敦夫：“ ホームセンターのサービスイノベーション: 最適店舗レイアウトとシフト作成”，オペレーションズ・リサーチ, 56(8), pp.439–444 (2011)

[5] 茨木・他 7 名：“コンビニ割棚レイアウトへの OR 的手法の適用”，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年秋期研究発表会, (2016)

[6] 沼田一道：“汎用 MIP ソルバによる巡回セールスマン問題の求解”，オペレーションズ・リサーチ, 56(8), pp.452–455 (2011)

[7] 山本芳嗣, 久保幹雄：「巡回セールスマン問題への招待」，朝倉書店 (1997)

[8] Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvatal, V., Cook, W. J.: The traveling salesman problem: a computational study, Princeton university press (2011)

[9] Lawer, E. L., Lenstra, J. K., Kan, A. R., Shmoys, D. B.: The traveling salesman problem, Wiley (1985)

[10] Lenstra, J. K., Kan, A. R.: “ Some simple applications of the travelling salesman problem,” *Journal of the Operational Research Society*, 26(4), pp.717–

733 (1975)

[11] Frederickson, G. N., Hecht, M. S., Kim, C. E.: " Approximation algorithms for some routing problems. In Foundations of Computer Science," *Proc. of IEEE, 17th Annual Symposium*, pp.216–227 (1976)

[12] Franca, P. M., Gendreau, M., Laporte, G., Muller, F. M.: " The m-traveling salesman problem with minmax objective," *Transportation Science*, 29(3), pp.267–275 (1995)

[13] Vallivaara, I. : " A team ant colony optimization algorithm for the multiple travelling salesmen problem with minmax objective," *Proc. of the 27th IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control*, pp. 387–392 (2008)

[14] Ehrgott, M. and Gandibleux, X. : " A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization,". *OR Spectrum*, 22(4), pp.425–460 (2000)

[15] Jozefowiez,N., Glover,F. and Laguna,M.: " Multi-objective Meta-heuristics for the Traveling Salesman Problem with Profits," *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 7(2), pp.177–195 (2008)

[16] https://www.msi.co.jp/nuopt/.

[17] Sakawa, M.: Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization, Plenum Press, (1993)

[18] 原恒介："minmax 型 m 人巡回セールスマン問題の解法に関する研究", http://numaf.net/Z9/Z9a/html/THESIS/H25/abst_hara.pdf 2014.

[19] Yano, H.: Interactive multiobjective decision making under uncertainty, CRC Press, (2017)