

名古屋市立大学経済学会

オイコノミカ

第 43 卷 第 1 号

幾何レヴィ過程モデルによる日経225株価指数 オプション市場の分析

森 脇 成 彦

平成 18 年 9 月 1 日 発行

幾何レヴィ過程モデルによる 日経225株価指数オプション市場の分析

森 脇 成 彦^{*†}

1 はじめに

ブラック・ショールズモデルは、オプション価格理論において最も標準的なモデルとして広く知られている。それと同時に、ブラック・ショールズモデルの問題点についても詳しく分析されている。そして、それらの問題点に答える形でブラック・ショールズモデルに対する拡張モデルが多く提案されていることは周知の通りである。

本論文では、ブラック・ショールズモデルの問題点として、特に株式市場の特徴である収益率分布の非正規性とオプション市場の特徴であるボラティリティ・スマイルに注目した。

ブラック・ショールズモデルは、原証券の価格過程を幾何ブラウン運動によってモデル化している。すなわち、原証券の収益率分布に対しては正規性を仮定していた。しかしながら、株式市場においては収益率分布の正規性は支持されていない。事実、株価収益率分布の非正規性については、様々な論文で古くから指摘されているところであり、また、正規分布に代わる当てはまりの良い分布がいろいろと提案されている。例えば、安定分布やスケールド t -分布、VG分布などが有名である。そこで、株価収益率分布という観点からより現実に近いモデル（幾何レヴィ過程モデル）に基づいてオプション価格を評価した場合にどのような影響が生じるか分析を行なった。

次にボラティリティ・スマイルという観点から実証分析を行なった。ボラティリティ・スマイルはオプション市場の特徴で、各国の株価指数オプション市場において観察されている。例えば、S&P-500 (American stock index) オプション市場におけるボラティリティ・スマイルについて分析を行なっている論文としてはRubinstein [17, 18], Dumas et al. [5], Cont [4] などがある。また、FTSE-100 (UK stock index) optionに関してはNcube [15], DAX (German stock index) optionに関してはHafner and Wallmeier [8], IBEX-35 (Spanish stock index) optionに関してはPena, Rubio and Serna [16] などがある。この広く一般的に観察されている特徴の存在は、ブラック・

*名古屋市立大学大学院経済学研究科博士後期課程 c043803@ed.nagoya-cu.ac.jp

†本稿を書くにあたっては、名古屋市立大学の宮原孝夫教授に多くのご指導をいただきました。ここに記して感謝いたします。ただし、あり得べきすべての誤りは著者の不明によるものであることをここで断りしておきます。

ショールズモデルには組み込まれていない重要な要素がオプション市場には存在することを示唆するものと考えられる。その1つの要因として考えられているのが、株価のジャンプ・リスクである。Rubinstein [18] によれば、ブラック・マンデー以降にボラティリティ・スキューが顕著に観察されるようになってきている。この事実は、オプションの価格に株価が急激に変動（特に下落）することに対するリスクが明示的に組み込まれるようになったことを示すものと考えられている。

本論文で注目した幾何レヴィ過程モデルは、ボラティリティ・スマイルを説明できるモデル（いわゆるスマイル・モデル）としてよく知られている。本論文で分析の対象とした日経225コールオプション市場においてもボラティリティ・スマイルが観察される。そこで、本論文では、幾何レヴィ過程モデルを用いて日経225コールオプション市場におけるボラティリティ・スマイルについて実証分析を行なった。

ここで、幾何レヴィ過程モデルは非完備市場であることが知られている。それゆえ、幾何レヴィ過程モデルに基づくオプション評価にはいくつかの方法がある。本論文では、幾何レヴィ過程モデルに基づくオプション評価モデルとしてMiyahara [11] によって提唱された [GLP & MEMM] モデルに基づいて分析を行なった。それと同時に、[GLP & MEMM] モデル以外の幾何レヴィ過程モデルに基づく代表的なオプション評価モデルに対しても分析を行なった。

本論文の構成は次の通りである。まず、続く第2章では幾何レヴィ過程モデルについて簡単に説明する。幾何レヴィ過程モデルについての詳細は、宮原 [12]、Miyahara [13]などを参照の事。そして、第3章では実証分析を行なうに先立ち、対象とするデータについて述べる。第4章では、日経225の収益率分布の非正規性という観点から実証分析を行ない、日経225コールオプションの評価に幾何レヴィ過程モデルを用いた場合のパフォーマンスの評価を行なう。第5章では、ボラティリティ・スマイルという観点から実証分析を行なう。第6章で、分析結果のまとめと今後の課題について述べる。

2 幾何レヴィ過程モデルについて

幾何レヴィ過程モデル $S(t) = (S_0(t), S_1(t))$ とは、

$$\begin{aligned} S_0(t) &= e^{rt}, && \text{安全証券価格} \\ S_1(t) &= S_1(0) \exp(Z_t), \quad S_1(0) = s_1 > 0. && \text{リスク証券価格} \end{aligned}$$

と与えられた場合をいう。ただし、安全証券収益率 r は一定とする。ここで、 $\{Z_t\}$ とは生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ で特徴づけられるレヴィ過程である。このとき、 Z_t の特性関数 $\phi_t(u)$ はレヴィ・ヒンチンの標準形と呼ばれる次式で与えられる：

$$\phi_t(u) = \left\{ \exp \left(ibu - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \right) \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux 1_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \right) \right\}^t.$$

またこのことは標本関数にまで精緻化することができ、 Z_t は、

$$Z_t = bt + \sigma W_t + \int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x \tilde{N}_p(dudx) + \int_{0+}^t \int_{|x| > 1} x N_p(dudx)$$

なる表現が可能である。ただし、 $\{W_t\}$ 、 $N_p(dt dx)$ はそれぞれウィナー過程、ポアソン配置を表すものとする。また、 $\tilde{N}_p(dudx) = N_p(dudx) - \hat{N}_p(dudx)$ であり、 $\hat{N}_p(dudx)$ は $N_p(dudx)$ のcompensatorで $\hat{N}_p(dudx) = du\nu(dx)$ である。

この表現からも分かる様に、レヴィ過程とは、直感的に言えば、連続的な確率変動にジャンプ的な確率変動が加わったものであるといえよう。

また、

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$$

が成り立つときには

$$\int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x \tilde{N}_p(dudx) = \int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x N_p(dudx) - t \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$$

とかけ、 Z_t は次のように表現できる：

$$Z_t = b_0 t + \sigma W_t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} x N_p(dudx), \quad b_0 = b - \int_{|x| < 1} x \nu(dx)$$

この場合に対応する生成要素が、 $(\sigma^2, \nu(dx), b_0)_0$ であり、この表現もよく使われている。

幾何レヴィ過程モデルは、生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ により特徴付けることができる。例えば、生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ として特に $(\sigma^2, 0, b)$ とした場合の幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルとなる。

幾何レヴィ過程モデルとして、特にMertonモデル、幾何VG (variance gamma) 過程モデル、幾何NIG (normal inverse gaussian) 過程モデルについて考察する。それぞれの市場モデルに対応する生成要素は、

- Mertonモデル

$$\sigma^2 \in (0, \infty)$$

$$\nu(dx) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2v} \right\} dx, \quad c, v > 0$$

$$b_0 \in \mathbb{R}$$

- 幾何VG過程モデル

$$\sigma^2 = 0$$

$$\nu(dx) = C (I_{\{x < 0\}} e^{-c_1|x|} + I_{\{x > 0\}} e^{-c_2|x|}) |x|^{-1} dx, \quad C, c_1, c_2 > 0$$

$$b_0 \in \mathbb{R}$$

- 幾何NIG過程モデル

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 0 \\ \nu(dx) &= \frac{\delta\alpha \exp[\beta x] \mathcal{K}_1(\alpha|x|)}{\pi |x|} dx, \quad 0 < |\beta| \leq \alpha, \delta > 0 \\ b_0 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ただし, \mathcal{K}_λ は次数 λ の第 2 種変形ベッセル関数.

である.

一般に, 幾何レヴィ過程モデルは非完備市場である. それゆえ, 幾何レヴィ過程モデルに対するオプション評価モデルはブラック・ショールズモデルの場合と違い必ずしも明らかではない. しかしながら, 妥当性のあるオプション評価モデルとして, いくつかの候補が考えられている. そして, それらオプション評価モデルの下でのヨーロッパ型コールオプションの価格 C は, いずれも

$$C = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \right]$$

なる形で与えられており, モデル間の違いは, 同値マルチンゲール測度 \mathbf{Q} の違いに還元される. それゆえ, ある幾何レヴィ過程モデルに対していかなるオプション評価モデルを用いるべきかという問題は, 同値マルチンゲール測度の選択の問題と捉えることができる.

ここで, 一般に, 幾何レヴィ過程モデルに対する同値マルチンゲール測度に関しては次の定理が重要である:

定理 2.1 (Sato [19] (pp218-219; Theorem 33.1, 33.2))

- (i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の $\{Z_t\}$ と $(\Omega, \mathcal{F}, \check{\mathbf{P}})$ 上の $\{Z_t\}$ はそれぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\check{\sigma}^2, \check{\nu}(dx), \check{b})$ によって特徴付けられるレヴィ過程であるとする. このとき, 次の 3 つの条件:

1. $\sigma^2 = \check{\sigma}^2$
2. レヴィ測度 $\nu, \check{\nu}$ は相互に絶対連続な測度で, $\varphi(x) := \log\left(\frac{d\check{\nu}}{d\nu}\right)$ が条件:

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\varphi(x)/2} - 1)^2 \nu(dx) < \infty$$

を満たしている.

3. $\check{b} - b - \int_{|x| \leq 1} x(\check{\nu} - \nu)(dx) \in \mathfrak{R}(\sigma^2)$, $\mathfrak{R}(\sigma^2) := \{\sigma^2 x : x \in \mathbb{R}\}$

が満たされているならば, そして, そのときに限り, 任意の $t \in (0, \infty)$ に対して, $\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$ と $\check{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_t}$ とは相互に絶対連続となる.

- (ii) さらに, 条件 3 を具体的に次のように与えよう:

$$3'. \quad \check{b} - b - \int_{|x| \leq 1} x(\check{\nu} - \nu)(dx) = \sigma^2 \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

このときには

$$\begin{aligned}
U_t &= \eta\sigma W_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) N_P(dudx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\varphi(x)} - 1) d\nu(dx) \\
&= \eta\sigma W_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \tilde{N}_P(dudx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) d\nu(dx)
\end{aligned}$$

がほとんど確実に定義でき、 U_t は以下に与える生成要素 $(\sigma_U^2, \nu_U(dx), b_U)$ により特徴付けられる $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の \mathbb{R} におけるレヴィ過程となる。

$$\begin{aligned}
\sigma_U^2 &= \eta^2\sigma^2 \\
\nu_U &= \nu\varphi^{-1} \Big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \\
b_U &= -\frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 - \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y1_{\{0<|y|\leq 1\}}(y)) (\nu\varphi^{-1})(dy).
\end{aligned}$$

このとき、任意の $t \in (0, \infty)$ に対して

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} [e^{U_t}] = \mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{P}}} [e^{-U_t}] = 1$$

が成り立ち

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{U_t} \quad \mathbf{P}\text{-a.s.} \quad (1)$$

となる。

いま $Y_t := e^{U_t}$ とすると、(1) は次のようにも書ける¹⁾ :

1) $f(x) = e^x$ とすると、レヴィ過程に対する伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
e^{U_t} &= 1 + \int_{0+}^t \eta\sigma_U e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \left(b_U + \frac{1}{2}\eta^2\sigma_U^2 \right) e^{U_{s-}} ds + \int_{0+}^t \int_{|y|\leq 1} ye^{U_{s-}} \tilde{N}_P^{(U)}(dsdy) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \left(e^y e^{U_{s-}} - e^{U_{s-}} - e^{U_{s-}} y 1_{\{|y|\leq 1\}} \right) N_P^{(U)}(dsdy) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta\sigma_U e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \left(b_U + \frac{1}{2}\eta^2\sigma_U^2 \right) e^{U_{s-}} ds + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} ye^{U_{s-}} \tilde{N}_P^{(U)}(dsdy) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{|y|>1} ye^{U_{s-}} ds\nu_U(dy) + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^y - 1 - y) N_P^{(U)}(dsdy) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta\sigma_U e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} ye^{U_{s-}} \tilde{N}_P^{(U)}(dsdy) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^y - 1 - y) N_P^{(U)}(dsdy) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^y - 1 - y) d\nu_U(dy) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta\sigma e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{U_{s-}} \tilde{N}_P(dsdx) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) N_P(dsdx) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) \nu(dx) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta\sigma e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{U_{s-}} \tilde{N}_P(dsdx) + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) \tilde{N}_P(dsdx) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta\sigma e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1) \tilde{N}_P(dsdx)
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{d\check{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma Y_{s-} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} Y_{s-} \left(e^{\varphi(x)} - 1 \right) \check{N}_P(dsdx) \quad \mathbf{P}\text{-a.s.} \quad (2)$$

また、density transformationした場合には $\check{\mathbf{P}}$ の下での確率過程 $\{Z_t\}_{t \leq T}$ は再びレヴィ過程となっている点に注目すれば、 $\{e^{-rt} S_t\}_{t \leq T}$ が $\check{\mathbf{P}}$ -martingaleとなるための条件は

$$\check{\psi}(-i) = \frac{\check{\sigma}^2}{2} + \check{b} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^x - 1 - x 1_{\{|x| \leq 1\}} \right) \check{\nu}(dx) = r \quad (3)$$

となる²⁾。

以上から、同値マルチンゲール測度を定めるためには、定理2.1に従って同値な測度を特定し、(3)を満たすように(定理2.1の条件1, 2, 3'に影響しない範囲内で)変動可能なパラメータ η を用いて調整してやればよいことが分かる。

本論文では、同値マルチンゲール測度として

- minimal martingale measure (MMM)
- mean-correcting martingale measure (MCMM)
- Esscher transformed martingale measure (ESMM)
- minimal entropy martingale measure (MEMM)

に注目する。それぞれの測度に対して以下のことがわかっている。

次の[GLP & MMM] モデルに関する結果はChan [3] によるものである。ただし、ここでは測度変換後の株価過程も幾何レヴィ過程となる場合に限定した結果を述べる。

ここに、同値martingale測度 $\hat{\mathbf{P}}$ がminimal martingale measureであるとは、 $\{e^{-rt} S_t\}_{t \leq T}$ のmartingale部分 M に対して、 $\langle M, L \rangle = 0$ となる任意の2乗可積分 \mathbf{P} -martingale L が、 $\hat{\mathbf{P}}$ -martingaleとなっている場合をいう (Föllmer and Schweizer [6, p398; definition 3.2])。

いま、同値martingale測度 $\hat{\mathbf{P}}$ は

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_0^t \gamma_s \sigma Y_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_s Y_{s-} x \check{N}_P(dsdx)$$

2) $\tau := T - t$ とする。いま

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\hat{\mathbf{P}}} \left[e^{-r(T-t)} S_T \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbf{E}^{\hat{\mathbf{P}}} \left[e^{-r\tau} S_t \exp(Z_T - Z_t) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r\tau} S_t \mathbf{E}^{\hat{\mathbf{P}}} \left[\exp(Z_T - Z_t) \right] = e^{-r\tau} S_t \mathbf{E}^{\hat{\mathbf{P}}} \left[\exp \{i(-i)Z_\tau\} \right] = e^{-r\tau} S_t \exp[\tau \check{\psi}(-i)] \\ &= S_t \exp[(\check{\psi}(-i) - r)\tau] \end{aligned}$$

とかけるので、 $\{e^{-rT} S_T\}$ が $\check{\mathbf{P}}$ -martingaleであるとは

$$\check{\psi}(-i) = r$$

が成り立つことをいう。

により定まるとする. このとき $\hat{\mathbf{P}}$ は minimal martingale measure となっている (Chan [3, p517]). ただし, $\{\gamma_t\}_{t \leq T}$ は $\{e^{-rt} S_t\}_{t \leq T}$ が martingale となるように選ばれている. また, Z_t は必要なだけの次数の有界なモーメントをもっているものと仮定する. 一般に, (2) が成り立っていたことから, 上式と比較することによって次の結果を得る³⁾:

MMM いま, 確率過程 $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ 及び $(\{Z_t\}, \hat{\mathbf{P}})$ は, それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$, $(\hat{\sigma}^2, \hat{\nu}(dx), \hat{b})$ を持つ \mathbb{R} におけるレヴィ過程であるものとする. このとき, 生成要素が

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \hat{\nu}(dx) &= (\eta x + 1)\nu(dx), \\ \hat{b} &= b + \eta \left(\sigma^2 + \int_{\{|x| \leq 1\}} x^2 \nu(dx) \right) \\ \eta &= \frac{r - \psi(-i)}{\sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x(e^x - 1)\nu(dx)}\end{aligned}$$

なる関係を満たすならば, $\hat{\mathbf{P}}$ は minimal martingale measure となる.

一般に, MCM といえば, 事前の測度 \mathbf{P} がマルチンゲール測度となるように平均を調整して

$$3) \quad \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_0^t \gamma_s \sigma Y_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_s Y_{s-} x \tilde{N}_P(ds dx)$$

と

$$\frac{d\check{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_0^t \eta \sigma Y_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Y_{s-} (e^{\varphi(x)} - 1) \tilde{N}_P(ds dx)$$

を比較すれば

$$\gamma_t = \eta$$

そして, さらに

$$\eta x = e^{\varphi(x)} - 1$$

が成り立っていればよいことが分かる. すなわち

$$\varphi(x) = \log(\eta x + 1)$$

であるから

$$\hat{\nu}(dx) = (\eta x + 1)\nu(dx)$$

とすればよい. また, このとき

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \sigma^2 \eta + b + \int_{|x| \leq 1} x(\hat{\nu} - \nu)(dx) \\ &= b + \left(\sigma^2 + \int_{\{|x| \leq 1\}} x^2 \nu(dx) \right) \eta\end{aligned}$$

である. そして, η は

$$\hat{b} = r - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) \hat{\nu}(dx)$$

が成り立つように選ばばよい.

得られた測度のことを指す。ただし、本論文では、MCMMといえば、以下のように、事前の測度 \mathbf{P} に対して同値となる場合に限定する。

MCMM いま、確率過程 $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ 及び $(\{Z_t\}, \bar{\mathbf{P}})$ は、それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\bar{\sigma}^2, \bar{\nu}(dx), \bar{b})$ を持つ \mathbb{R} におけるレヴィ過程であるものとする。このとき、 $\bar{\mathbf{P}}$ が*mean-correcting measure*であるとは、生成要素が

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \bar{\nu}(dx) &= \nu(dx), \\ \bar{b} &= \sigma^2 \eta + b, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

なる関係を満たす場合をいう。さらに、 η として特に

$$\eta = \frac{r - b - \sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^x - 1 - x 1_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx)}{\sigma^2}, \quad \sigma^2 \neq 0$$

とした場合には、 $\bar{\mathbf{P}}$ はマルチンゲール測度となり、このとき、 $\bar{\mathbf{P}}$ は*mean-correcting martingale measure (MCMM)* と呼ばれる。ここに、 $\bar{\mathbf{P}}$ がマルチンゲール測度であるとは、 $\{e^{-rt} S_t\}_{t \leq T}$ が $\bar{\mathbf{P}}$ -マルチンゲールである場合をいう。

$(\sigma^2, \nu(dx), b_0)$, $\sigma^2 \neq 0$ の場合の [GLP & MCMM] モデルはMertonの公式 [10] としてよく知られた結果と一致する。

ESMMに関してはSchoutens [20] を及びその参考文献を参照のこと。

ESMM いま $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ と $(\{Z_t\}, \tilde{\mathbf{P}})$ は、それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\nu}(dx), \tilde{b})$ を持つ \mathbb{R} におけるレヴィ過程であるものとする。このとき、生成要素が

$$h^* \in \{h \in \mathcal{L} \mid \psi(-i(1+h)) - \psi(-ih) = r\};$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \tilde{\nu}(dx) &= e^{h^* x} \nu(dx), \\ \tilde{b} &= b + \sigma^2 h^*\end{aligned}$$

なる関係を満たすならば、 $\tilde{\mathbf{P}}$ はESMMとなる。ただし

$$\mathcal{L} := \left\{ h \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} (e^{hx/2} - 1)^2 \nu(dx) < \infty \right\}.$$

この場合の測度がエッセジャー変換になっていることは容易に確かめることができる。

[GLP & MEMM] モデルはMiyahara [11] で提案されたものであり、[GLP & MEMM] モデル

に対して以下の結果が示されている。

MEMM (Fujiwara and Miyahara [7]) 次の2つの条件を満たす定数 θ^* が存在するものと仮定する。

$$(C_1) \quad \int_{\{x>1\}} e^x e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) < \infty$$

$$(C_2) \quad b + \left(\frac{1}{2} + \theta^*\right) \sigma^2 + \int_{\{|x|>1\}} (e^x - 1) e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) \\ + \int_{\{|x|\leq 1\}} \left((e^x - 1) e^{\theta^*(e^x-1)} - x\right) \nu(dx) = r$$

このとき次のことが成立する。

1. (MEMM の存在) MEMM \mathbf{P}^* が存在する。
2. (レヴィ過程) Z_t は \mathbf{P}^* の下でもレヴィ過程で、その生成要素 (A^*, ν^*, b^*) は

$$A^* = \sigma^2 \\ \nu^*(dx) = e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) \\ b^* = b + \theta^* + \sigma^2 + \int_{\{|x|\leq 1\}} x d(\nu^* - \nu)$$

で与えられる。

[GLP & MEMM] モデルは、多くの良い性質を有していることが知られており (宮原 [12] を参照の事)、幾何レヴィ過程モデルに対するオプション評価モデルのなかでは経済理論としての一般性と合理性を最も兼ね備えたモデルである。

3 データについて

本論文では、分析の対象として大阪証券取引所 (OSE) で取引された日経225株価指数コール・オプションを採用した。日経225株価指数オプションは1989年からOSEで取引が開始され、当初の数年間にはアメリカ型のオプションとして取引されていたが、現在ではヨーロッパ型のオプションが取引されている (see <http://www.ose.or.jp/futures/report/0007.pdf>)。

実際に取引されたオプション価格の中には、オプションの理論的な上限・下限値から外れた価格が存在している。本来であれば、そのようなオプションに対しては裁定取引が行なわれるはずであるのだが、取引コストの影響などによって理論的な範囲から外れた価格が付くことがあることが知られている。本論文では、ヨーロッパ型オプションの理論的な上限・下限値：

$$\text{コール・オプション価格 } c : \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq c \leq S_0$$

から外れたオプションは分析の対象から除外した。また、オプションの取引時間は午後3時15

分までである一方で、原証券である日経225の終値は午後3時時点のものである。したがって、取引終了時点のオプション価格を評価する際、原証券価格は必ずしも明らかではない。日々の日経225の変動からするとこの15分というタイムラグは小さなものであるとはいえないであろう。このタイムラグを考慮するために、よく先物価格が用いられている。これは、先物価格の取引終了時点がオプションのそれと同じであることによる。本論文では、日経225の終値を先物価格の公式：

$$F_t(T_F) = S_t e^{r(T_F - t)}, \quad F_t(T_F) : \text{futures price expiring in } T_F \text{ at time } t.$$

から、日経225先物の終値を代入することで逆に推計した。ここで、日経225先物の終値としては、その取引日において最も取引高の大きかったものを使用した。ただし、薄商いのオプションに対してありえることであるが、オプションの終値が日経225の終値以前の時点で評価されたものである場合の影響については考慮していない。こうして得られた日経225の終値を S^* で表すこととする。図1は、 S^* のサンプル・パスを描いたものである。そして、日経225の終値 S との差： $(S - S^*)$ を描いたのが図2である。2000年4月21日に価格差が-515.62と他より大きな値をとっていたが、これは、翌営業日から日経225の構成銘柄が大きく変更されたことが影響したと考えられる。



図1 S^* のサンプル・パス

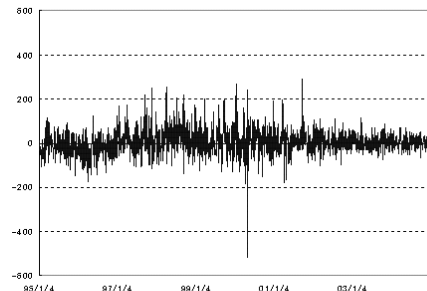


図2 価格差

さて、本論文では、特に断らない限り、 $[t - 1, t]$ での日経225株価指数の収益率といえは $\log \text{return} (\log S_t - \log S_{t-1})$ のことを指すものとする。ここで、日経225の構成銘柄は2000年4月に大きく（225銘柄中30銘柄）変更されているがこの入れ替えによる影響については考慮に入れていない。また、日経225の収益率の曜日効果については考慮に入れていない。

オプションの残存期間について満期日までの日数を暦日か営業日のどちらに基づいて計算すべきか議論のあるところである。一般には、営業日ベースの残存期間を用いた方が良いとされている (see [9, pp. 393-396])。ここで、我々が対象としているデータで、暦日ベースの残存期間を用いた場合と営業日ベースの残存期間を用いた場合とでオプション価格評価にどのような影響が現れるか調べてみた。その結果をまとめたものが表1である。表1から分かるように、営業日ベー

表 1 残存期間の計算方法の違いについて，ブラック・ショールズモデルの場合で比較した．1995年から2004年を分析対象として，その各四半期を分析期間とした．そして，その各期間の期首から直近1000営業日をサンプル区間としてパラメータを最尤推定し，そのパラメータを使って各分析期間のオプション価格を評価した．

Pricing Errors	trading day base	calendar day base
ARPE	0.350710	0.764910
RMSE	129.0437	158.2915
MER	0.052979	0.640820

スの残存期間を用いた方が暦日ベースの残存期間を用いた場合より当てはまりが良い．この結果より，本論文では残存期間としては営業日ベースの残存期間を採用した．

本論文では，安全証券収益率として週次の新発CDレートを採用した．例えば，暦日ベースの残存期間が50日のオプションに対しては，その週の新発CDレートで満期日が30日から60日の場合の値を用いた．また，実際にはその値を連続複利に変換した後，営業日ベースの年率に直したものをを用いた．まれにオプションの残存期間に対応するCDレートが存在しない場合があったが，その場合は便宜的に利用可能な直前の値を用いた．ただし，カリブレーション問題を解く場合には，数値計算をしやすくするため，便宜的に月次の平均金利を使用した．

3.1 log return 分布の正規性について

よく知られているように，株価の収益率分布は正規分布よりも急尖的な，あるいは，歪んだ分布に従っていることが統計的に確認されている．本論文においても，実際に分析を行なうに際して，分布のパラメータ推定を行なう各区間において収益率分布の正規性について検定を行った．ここで，正規性の検定として特にKolmogorov-Smirnov test, Lilliefors testそしてJarque-Bera testを行なった．表2は，その結果を記したものである（ただし，紙面の都合上，1ヶ月置きの結果のみを載せている）．Kolmogorov-Smirnov testではほとんどの期間で正規性は棄却されなかった．しかし，一般にKolmogorov-Smirnov testよりも正規性の検定力が高いとされるJarque-Bera testではほとんどの期間で正規性が棄却されていた．また，Lilliefors testにおいても多くの期間で正規性は棄却されていた．この結果から分析した期間においては，一般的には日経225の収益率分布の正規性は否定されるといえよう．また，歪度と尖度も計算したが，表2によれば，日経225の収益率の分布は分析した期間においてはほとんどの場合で正規分布よりも急尖的な特徴を持ち，また歪みを持っていることが分かる．

我々が分析の対象とするモデルは，Mertonモデル，幾何VGモデルそして幾何NIGモデルである．これらのモデルが仮定する収益率分布が，実際の収益率の分布の特徴をよく捉えられるということは周知の通りである．ここで，分析対象とした各区間で，分布のパラメータを最尤法によ

表2 Normality Test for the distribution of log returns on Nikkei 225 index. To test the normality, we performs a Kolmogorov-Smirnov test, Lilliefors test, and Jarque-Bera test (1 : reject the normality, 0 : cannot reject).

sample period	KS test	Lilliefors test	JB test	skewness	kurtosis
1992/12/21~1994/12/30	1	1	1	0.4819	7.4483
1993/01/21~1995/01/31	1	1	1	0.3107	7.8267
1993/02/19~1995/02/28	1	1	1	0.2536	7.7351
1993/03/23~1995/03/31	1	1	1	0.1765	7.1107
1993/04/20~1995/04/28	1	1	1	0.0138	7.2462
1993/05/24~1995/05/31	1	1	1	-0.0053	7.2043
1993/06/24~1995/06/30	1	1	1	0.0019	6.9975
1993/07/23~1995/07/31	1	1	1	0.1815	7.1279
1993/08/25~1995/08/31	1	1	1	0.2096	6.8516
1993/09/24~1995/09/29	1	1	1	0.2314	6.5675
1993/10/26~1995/10/31	0	1	1	0.2321	6.3609
1993/11/25~1995/11/30	1	1	1	0.2462	6.6172
1993/12/27~1995/12/29	1	1	1	0.3361	7.3037
1994/01/25~1996/01/31	1	1	1	0.5115	7.5868
1994/02/23~1996/02/29	0	1	1	0.1352	6.0519
1994/03/24~1996/03/29	0	1	1	0.1128	6.1506
1994/04/22~1996/04/30	0	1	1	0.1022	6.3781
1994/05/27~1996/05/31	0	1	1	0.1568	6.2726
1994/06/24~1996/06/28	0	1	1	0.1532	6.4655
1994/07/27~1996/07/31	0	1	1	0.1480	6.3782
1994/08/26~1996/08/30	0	1	1	0.1449	6.2526
1994/09/26~1996/09/30	0	1	1	0.1291	6.1462
1994/10/27~1996/10/31	0	1	1	0.1510	6.0602
1994/11/28~1996/11/29	0	1	1	0.1281	5.9448
1994/12/27~1996/12/30	0	1	1	0.0992	5.6523
1995/01/26~1997/01/31	0	1	1	0.2492	4.9105
1995/02/22~1997/02/28	0	1	1	0.2060	4.8106
1995/03/23~1997/03/31	0	1	1	0.2375	4.9342
1995/04/21~1997/04/30	0	1	1	0.3301	4.8450
1995/05/25~1997/05/30	0	1	1	0.3369	4.8124
1995/06/23~1997/06/30	0	1	1	0.3699	4.9959
1995/07/25~1997/07/31	0	1	1	0.1629	4.3021
1995/08/23~1997/08/29	0	1	1	0.0183	4.3138
1995/09/21~1997/09/30	0	0	1	-0.0042	4.2437
1995/10/24~1997/10/31	0	1	1	-0.0844	4.3025
1995/11/20~1997/11/28	0	1	1	0.0345	6.4432
1995/12/20~1997/12/30	0	1	1	-0.0206	5.9512
1996/01/22~1998/01/30	0	1	1	0.0796	5.9488
1996/02/19~1998/02/27	0	1	1	0.0720	5.8266
1996/03/21~1998/03/31	0	1	1	0.0871	5.6047
1996/04/19~1998/04/30	0	1	1	0.0976	5.3588
1996/05/21~1998/05/29	0	1	1	0.0735	5.3757
1996/06/20~1998/06/30	0	1	1	0.1226	5.1885
1996/07/22~1998/07/31	0	1	1	0.1036	5.0076
1996/08/20~1998/08/31	0	1	1	0.1194	4.9098
1996/09/18~1998/09/30	0	1	1	0.1039	4.7819
1996/10/22~1998/10/30	0	1	1	0.1553	4.7683
1996/11/19~1998/11/30	0	1	1	0.1554	4.5662
1996/12/18~1998/12/30	0	1	1	0.1662	4.5536
1997/01/22~1999/01/29	0	1	1	0.1474	4.6769
1997/02/19~1999/02/26	0	1	1	0.1408	4.9087
1997/03/24~1999/03/31	0	1	1	0.1676	4.6852
1997/04/22~1999/04/30	0	1	1	0.1671	4.7477
1997/05/20~1999/05/31	0	1	1	0.1953	4.7470
1997/06/19~1999/06/30	0	1	1	0.1778	4.7369
1997/07/18~1999/07/30	0	1	1	0.1669	4.6868
1997/08/20~1999/08/31	0	1	1	0.1766	4.6738
1997/09/18~1999/09/30	0	1	1	0.1458	4.6251

sample period	KS test	Lilliefors test	JB test	skewness	kurtosis
1997/10/20~1999/10/29	0	1	1	0.1465	4.6445
1997/11/18~1999/11/30	0	1	1	0.0223	4.3702
1997/12/18~1999/12/30	0	1	1	0.1169	4.5677
1998/01/21~2000/01/31	0	1	1	0.1316	4.3746
1998/02/19~2000/02/29	0	1	1	0.1348	4.4606
1998/03/23~2000/03/31	0	1	1	0.1189	4.5870
1998/04/20~2000/04/28	0	1	1	-0.0848	5.4380
1998/05/21~2000/05/31	0	1	1	-0.1038	5.2755
1998/06/22~2000/06/30	0	1	1	-0.1517	5.2679
1998/07/21~2000/07/31	0	1	1	-0.1319	5.2853
1998/08/21~2000/08/31	0	1	1	-0.1571	5.2567
1998/09/21~2000/09/29	0	1	1	-0.1508	5.2706
1998/10/21~2000/10/31	0	0	1	-0.2315	4.8044
1998/11/19~2000/11/30	0	1	1	-0.2478	4.9154
1998/12/21~2000/12/29	0	1	1	-0.2483	4.8749
1999/01/21~2001/01/31	0	0	1	-0.2454	4.9463
1999/02/18~2001/02/28	0	0	1	-0.2185	4.8552
1999/03/19~2001/03/30	0	1	1	-0.0288	5.7451
1999/04/19~2001/04/27	0	1	1	-0.0196	5.8310
1999/05/24~2001/05/31	0	1	1	-0.0139	5.7626
1999/06/22~2001/06/29	0	1	1	0.0006	5.7164
1999/07/22~2001/07/31	0	1	1	0.0396	5.4964
1999/08/24~2001/08/31	0	1	1	0.0979	5.3095
1999/09/21~2001/09/28	0	1	1	-0.0697	5.4590
1999/10/25~2001/10/31	0	1	1	-0.0314	5.3087
1999/11/25~2001/11/30	0	1	1	-0.0087	5.1425
1999/12/22~2001/12/28	0	1	1	-0.0192	4.8736
2000/01/24~2002/01/31	0	1	1	-0.0098	4.8987
2000/02/21~2002/02/28	0	1	1	0.0466	4.7639
2000/03/21~2002/03/29	0	1	1	0.1144	4.6622
2000/04/19~2002/04/30	0	1	1	0.2460	4.3222
2000/05/23~2002/05/31	0	1	1	0.2720	4.4231
2000/06/20~2002/06/28	0	1	1	0.2529	4.3022
2000/07/24~2002/07/31	0	1	1	0.2492	4.1463
2000/08/23~2002/08/30	0	1	1	0.2591	4.1423
2000/09/20~2002/09/30	0	1	1	0.2586	3.9918
2000/10/23~2002/10/31	0	1	1	0.2551	3.9782
2000/11/21~2002/11/29	0	0	1	0.2270	3.8811
2000/12/20~2002/12/30	0	1	1	0.2385	3.9368
2001/01/22~2003/01/31	0	1	1	0.2475	3.9748
2001/02/19~2003/02/28	0	1	1	0.2294	3.9567
2001/03/19~2003/03/31	0	0	1	0.2244	3.9184
2001/04/18~2003/04/30	0	0	0	0.1137	3.4501
2001/05/22~2003/05/30	0	0	0	0.0728	3.4744
2001/06/20~2003/06/30	0	0	0	0.0271	3.4535
2001/07/23~2003/07/31	0	0	0	-0.0059	3.4576
2001/08/21~2003/08/29	0	0	1	-0.0653	3.5632
2001/09/18~2003/09/30	0	0	0	0.0666	3.0674
2001/10/22~2003/10/31	0	0	0	-0.0177	3.2761
2001/11/15~2003/11/28	0	0	0	-0.0454	3.2361
2001/12/17~2003/12/30	0	0	0	-0.0651	3.2493
2002/01/21~2004/01/30	0	0	0	-0.0864	3.3078
2002/02/18~2004/02/27	0	0	0	-0.0933	3.3504
2002/03/22~2004/03/31	0	0	1	-0.2668	3.1171
2002/04/22~2004/04/30	0	0	1	-0.2755	3.1552
2002/05/21~2004/05/31	0	1	1	-0.3258	3.2056
2002/06/20~2004/06/30	0	0	1	-0.3402	3.2475
2002/07/19~2004/07/30	0	0	1	-0.3159	3.2838
2002/08/20~2004/08/31	0	0	1	-0.3633	3.4036
2002/09/18~2004/09/30	0	0	1	-0.3722	3.5163
2002/10/18~2004/10/29	0	0	1	-0.3884	3.6164
2002/11/18~2004/11/30	0	1	1	-0.3977	3.7071

りそれぞれ推定した（詳細は、第4章を参照の事）。そして、そのときのAIC（赤池情報量基準）を計算した。その結果をまとめたものが表3、4である（ただし、紙面の都合上1ヶ月置きの結果のみ載せている）。期間AにおいてはVG分布やNIG分布、Mertonモデルの分布の方が当てはまりがよかったのは言うまでもないが、表4から分かるように、比較的正規分布に近かった期間BにおいてもJarque-Bera testで正規性が棄却された期間においては概ね正規分布よりも他の分布の方が当てはまりがよいという結果であった。ただし、Mertonモデルの場合はそのパラメータ数が他のモデルより多いため正規性が棄却された場合でも有意な差が見られない期間も多かった。

以上から、本論文においても、日経225株価指数の収益率分布の非正規性を確認することができた。そして、正規分布よりもVG分布やNIG分布の方が現実の分布に対して有意に近い分布であるというよく知られた結論も、実証分析を行なうに先立って、本論文においても日経225株価指数の収益率分布に対して確認することができた。そして、この結果は、日経225の価格過程として幾何ブラウン運動から幾何レヴィ過程へ拡張することに対する実証的な根拠となる。

3.2 ボラティリティ・スマイル

ボラティリティ・スマイル（スキュー）とは、オプション市場で観察される重要な特徴で、ブラック・ショールズモデルの限界を示すものである。オプションの市場価格はブラック・ショールズモデルの理論価格と比較して、誤差に一定の傾向を持つことが観察されている。特に、ATMに対して、ITM、OTMのオプションがブラック・ショールズモデルより相対的に過大に評価される傾向は、ボラティリティ・スマイルと呼ばれている。また、ATMに対して、ITMのオプションがブラック・ショールズモデルよりも相対的に過大に評価され、OTMのオプションが相対的に過小に評価される傾向は、ボラティリティ・スキューと呼ばれている。ボラティリティ・スマイル（スキュー）は、ブラック・ショールズモデルがボラティリティに関して単調増大な関数である点に注意すれば、行使価格（もしくは、マニネス）に対してインプライド・ボラティリティをプロットすることでも確認できる。図3は、2004年12月15日に取引された残存期間57の日経225コール・オプションのインプライド・ボラティリティをプロットしたものである。この図のようにU字型の形状を示す場合がボラティリティ・スマイルと呼ばれる。また、図4のように、マニネスに対して単調減少するような形状をしている場合がボラティリティ・スキューと呼ばれている。

表3 分布のあてはまり：期間A

サンプル区間	J-B	AIC			
		BS	Merton	VG	NIG
1992/01/06~1994/01/12	1	-2704.22	-2731.51 *	-2732.88 *	-2730.93 *
1992/02/03~1994/02/08	1	-2690.15	-2727.51 *	-2729.38 *	-2729.7 *
1992/03/02~1994/03/08	1	-2687.08	-2724.03 *	-2725.84 *	-2725.9 *
1992/04/01~1994/04/07	1	-2690.8	-2729.55 *	-2731.06 *	-2731.26 *
1992/05/01~1994/05/12	1	-2748.05	-2783.08 *	-2784.67 *	-2785.77 *
1992/06/01~1994/06/08	1	-2773.79	-2816.78 *	-2817.26 *	-2819.42 *
1992/07/01~1994/07/08	1	-2793.07	-2840.86 *	-2840.27 *	-2843.31 *
1992/08/03~1994/08/10	1	-2834.42	-2893.26 *	-2889.33 *	-2894.1 *
1992/09/01~1994/09/08	1	-2909.48	-2958 *	-2955.71 *	-2959.56 *
1992/10/01~1994/10/11	1	-2954.91	-3005.24 *	-3003.59 *	-3007.72 *
1992/11/02~1994/11/11	1	-2968.36	-3025.84 *	-3026.05 *	-3030.17 *
1992/12/01~1994/12/09	1	-2988.76	-3042.77 *	-3045.45 *	-3047.84 *
1993/01/04~1995/01/12	1	-3000.24	-3060.49 *	-3062.9 *	-3066.28 *
1993/02/01~1995/02/09	1	-2976.95	-3048.6 *	-3048.47 *	-3053.08 *
1993/03/01~1995/03/08	1	-2955.14	-3021.61 *	-3024.55 *	-3026.53 *
1993/04/01~1995/04/11	1	-2935.48	-2994.71 *	-2998.06 *	-2999.43 *
1993/05/06~1995/05/15	1	-2956.1	-3015.11 *	-3017.74 *	-3020.22 *
1993/06/01~1995/06/08	1	-2947.13	-3001.69 *	-3002.89 *	-3006.84 *
1993/07/01~1995/07/07	1	-2914.54	-2966.06 *	-2977.33 *	-2981.23 *
1993/08/02~1995/08/08	1	-2907.32	-2961.86 *	-2966.43 *	-2968.23 *
1993/09/01~1995/09/07	1	-2888.54	-2940.37 *	-2945.24 *	-2946.16 *
1993/10/01~1995/10/06	1	-2870.39	-2917.01 *	-2919.28 *	-2921.55 *
1993/11/01~1995/11/07	1	-2862.45	-2906.67 *	-2911.37 *	-2911.52 *
1993/12/01~1995/12/06	1	-2894.18	-2945.85 *	-2949.55 *	-2948.81 *
1994/01/04~1996/01/09	1	-2928.59	-2984.07 *	-2988.5 *	-2986.93 *
1994/02/01~1996/02/07	1	-3001.53	-3036.86 *	-3043.1 *	-3040.44 *
1994/03/01~1996/03/06	1	-3017.01	-3056.8 *	-3062.99 *	-3059.5 *
1994/04/01~1996/04/08	1	-3024.08	-3065.6 *	-3068.49 *	-3066.81 *
1994/05/02~1996/05/09	1	-3030.62	-3074.63 *	-3077.86 *	-3075.58 *
1994/06/01~1996/06/05	1	-3020.64	-3064.94 *	-3068.4 *	-3065.77 *
1994/07/01~1996/07/05	1	-3038.93	-3092.47 *	-3098.52 *	-3094.73 *
1994/08/01~1996/08/05	1	-3025.81	-3073.92 *	-3079.34 *	-3076.43 *
1994/09/01~1996/09/05	1	-3019.66	-3063.73 *	-3066.97 *	-3065.07 *
1994/10/03~1996/10/07	1	-3016.27	-3059.2 *	-3061.95 *	-3060.06 *
1994/11/01~1996/11/06	1	-3008.27	-3047.38 *	-3049.86 *	-3047.77 *
1994/12/01~1996/12/04	1	-3003.93	-3041.24 *	-3043.78 *	-3041.94 *

・ J-B : Jarque-Bera Test (1 : 正規性を棄却, 0 : 棄却されない)

・ 正規分布と比較して有意な差が見られた場合には数値の右側に * を付加した

表4 分布のあてはまり：期間B

サンプル区間	J-B	AIC			
		BS	Merton	VG	NIG
2000/01/04~2002/01/11	1	-2682.43	-2697.83 *	-2698.46 *	-2700.31 *
2000/02/01~2002/02/08	1	-2685.99	-2700.35 *	-2700.39 *	-2702.24 *
2000/03/01~2002/03/11	1	-2655.42	-2671.86 *	-2676.12 *	-2674.21 *
2000/04/03~2002/04/11	1	-2647.66	-2660.83 *	-2663.35 *	-2662.42 *
2000/05/01~2002/05/14	1	-2666.31	-2673.45 *	-2679.26 *	-2675.33 *
2000/06/01~2002/06/11	1	-2683.2	-2692.77 *	-2699.61 *	-2695.27 *
2000/07/03~2002/07/11	1	-2663.48	-2668.62 *	-2670.53 *	-2671.32 *
2000/08/01~2002/08/08	1	-2647.76	-2653.74 *	-2653.79 *	-2654.17 *
2000/09/01~2002/09/10	1	-2644.6	-2649.08 *	-2648.85 *	-2649.31 *
2000/10/02~2002/10/10	1	-2632.22	-2632.44	-2633.81 *	-2634.19 *
2000/11/01~2002/11/12	1	-2625.7	-2626.01	-2627.75 *	-2628.01 *
2000/12/01~2002/12/10	1	-2624.73	-2625.06	-2630.26 *	-2626.68 *
2001/01/04~2003/01/16	1	-2635.08	-2636.78 *	-2638.01 *	-2638.32 *
2001/02/01~2003/02/13	1	-2631.36	-2632.4 *	-2633.4 *	-2633.72 *
2001/03/01~2003/03/12	1	-2629.44	-2630.16	-2631.27 *	-2631.55 *
2001/04/02~2003/04/11	0	-2667.85	-2663.04	-2664.77	-2664.41
2001/05/01~2003/05/13	0	-2681.63	-2676.85	-2677.4	-2677.33
2001/06/01~2003/06/11	0	-2689.44	-2686	-2686.26	-2686.49
2001/07/02~2003/07/10	0	-2684.42	-2679.98	-2681.87	-2681.92
2001/08/01~2003/08/11	0	-2691.69	-2689.33	-2689.82	-2689.98
2001/09/03~2003/09/11	1	-2703.86	-2702.5	-2703	-2703.12
2001/10/01~2003/10/10	0	-2742.25	-2736.39	-2738.56	-2738.35
2001/11/01~2003/11/13	0	-2744.32	-2739.46	-2741.62	-2741.37
2001/12/03~2003/12/15	0	-2739.45	-2734.32	-2736.64	-2736.12
2002/01/04~2004/01/16	0	-2753.13	-2748.44	-2750.96	-2750.09
2002/02/01~2004/02/13	0	-2763.39	-2759.31	-2762.01	-2761.88
2002/03/01~2004/03/11	0	-2779.93	-2775.76	-2779.64	-2779.48
2002/04/01~2004/04/08	1	-2810.49	-2804.98	-2808.93	-2812.27 *
2002/05/01~2004/05/13	1	-2794.11	-2789.48	-2791.09	-2791.13
2002/06/03~2004/06/11	1	-2783.7	-2778.65	-2787.95 *	-2786.7 *
2002/07/01~2004/07/09	1	-2809.08	-2804.34	-2812.8 *	-2812.35 *
2002/08/01~2004/08/12	1	-2832.52	-2828.33	-2835.97 *	-2835.83 *
2002/09/02~2004/09/13	1	-2846.98	-2843.76	-2852.98 *	-2848.81 *
2002/10/01~2004/10/13	1	-2870.57	-2868.92	-2877.84 *	-2878.35 *
2002/11/01~2004/11/15	1	-2892.3	-2891.41	-2898.97 *	-2893.57 *
2002/12/02~2004/12/14	1	-2915.73	-2916.43	-2923.75 *	-2924.29 *

・ J-B : Jarque-Bera Test (1 : 正規性を棄却, 0 : 棄却されない)

・ 正規分布と比較して有意な差が見られた場合には数値の右側に * を付加した

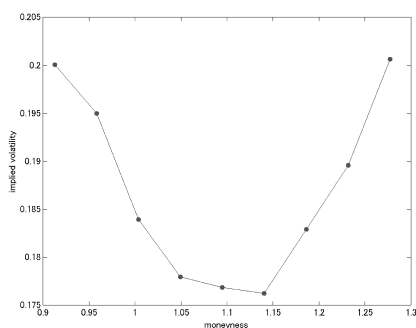


図3 ボラティリティ・スマイル：
2004/12/15，残存期間57日

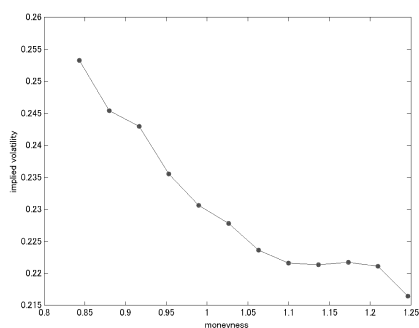


図4 ボラティリティ・スキュー：
2001/1/4，残存期間289日

ここに，インプライド・ボラティリティ $\sigma^{(im)}$ とは，

$$\exists \sigma, \quad C_{BS}(\sigma; K, T) = C^{(m)}(K, T)$$

なる σ のことをいう．ただし， $C^{(m)}$ はヨーロッパ型コール・オプションの市場価格を表すものとし，また， C_{BS} はヨーロッパ型コールオプションに対するブラック・ショールズの公式：

$$C_{BS} = S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2)$$

を表すものとする．ここで $\Phi(d)$ は正規分布の分布関数であり，また，

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

であるとする．

また，マネセスとは K/S_0 で定義され，マネセスが1の場合をアット・ザ・マネー (ATM)，1以下の場合をイン・ザ・マネー (ITM)，1以上の場合をアウト・オブ・ザ・マネー (OTM) と呼ぶ．

ここで，日経225コール・オプション市場では，ボラティリティ・スマイル (スキュー) が観察できるか調べてみた．その結果をまとめたものが表5，6である．この表から分かるように，日経225コール・オプション市場では傾向として残存期間が短い場合 (60日未満の場合) にはボラティリティ・スマイルが観察された．また，残存期間が長い (60日以上の場合) 場合には，はっきりとまでは言えないが2000年以降傾向としてボラティリティ・スキューが観察された．短期的には，株価が (上昇・下降ともに) 急激に変化すること事態がリスクとなり得るのでボラティリティ・スマイルが観察されることは妥当なことであろう．その一方で，長期的には，株価が急激に変化するリスクというよりも，株価が大きく下落することがリスクとなる．また，長期的には株価が上昇することはリスクとはなりえないであろう．したがって，残存期間が長期のオプション

に対してボラティリティ・スキューが観察されることも妥当なことであるといえる。ここで観察された、残存期間が短い場合にはボラティリティ・スマイルが、長い場合にはボラティリティ・スキューが観察されるという傾向は、他の株価指数オプション市場においても観察されている特徴である (see Hafner and Wallmeier [8])。このように、残存期間の長さによってボラティリティの特徴が異なることはよく知られていることである。

表5 営業日ベースで残存期間が60日未満の場合のインプライド・ボラティリティ $\sigma^{(im)}$ とヒストリカル・ボラティリティ $\hat{\sigma}$ の相対的な差: $(\sigma^{(im)} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ の平均値。ヒストリカル・ボラティリティは直近の180営業日分のデータから計算した。

moneyness	1995	1996	1997	1998	1999
$M < 0.90$	1.52324 (269)	1.63655 (182)	1.48710 (194)	0.806789 (421)	0.84310 (659)
$0.90 \leq M < 0.95$	0.50255 (526)	0.40596 (480)	0.51337 (523)	0.288589 (655)	0.20291 (970)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.15192 (2025)	0.03969 (2414)	0.14584 (2084)	0.027019 (1968)	-0.04190 (2352)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.15795 (788)	0.09933 (616)	0.14810 (834)	0.012777 (920)	-0.06547 (904)
$M \geq 1.10$	0.42513 (457)	0.32262 (90)	0.29870 (752)	0.140863 (994)	-0.04854 (381)

() 内はデータ数

moneyness	2000	2001	2002	2003	2004
$M < 0.90$	1.04436 (432)	1.34008 (1540)	1.45125 (1217)	2.27720 (504)	2.40598 (291)
$0.90 \leq M < 0.95$	0.38857 (853)	0.39518 (769)	0.18590 (495)	0.21543 (378)	0.16218 (359)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.10152 (2373)	0.12434 (1653)	0.02434 (1304)	0.05494 (1189)	-0.03765 (1471)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.07129 (985)	0.08932 (875)	0.02417 (705)	0.08645 (649)	-0.02401 (781)
$M \geq 1.10$	0.15789 (1347)	0.17185 (3003)	0.08297 (2361)	0.14602 (1936)	0.01492 (1665)

() 内はデータ数

表6 営業日ベースで残存期間が60日以上の場合のインプライド・ボラティリティ $\sigma^{(im)}$ とヒストリカル・ボラティリティ $\hat{\sigma}$ の相対的な差: $(\sigma^{(im)} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ の平均値。ヒストリカル・ボラティリティは直近の180営業日分のデータから計算した。

moneyness	1995	1996	1997	1998	1999
$M < 0.90$	-0.28068 (2)	NA (0)	-0.12061 (3)	0.06076 (35)	-0.03059 (34)
$0.90 \leq M < 0.95$	-0.04024 (21)	-0.06016 (10)	-0.09083 (32)	-0.09179 (124)	-0.06924 (254)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.00939 (289)	-0.03130 (319)	-0.03381 (328)	-0.02738 (575)	-0.05099 (830)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.02713 (171)	-0.00499 (74)	0.01222 (111)	-0.02242 (264)	-0.07382 (311)
$M \geq 1.10$	0.18343 (53)	-0.03313 (5)	0.07558 (24)	0.07508 (136)	-0.06851 (76)

() 内はデータ数

moneyness	2000	2001	2002	2003	2004
$M < 0.90$	0.12223 (239)	0.23829 (1880)	0.25070 (1233)	0.26764 (157)	0.23112 (69)
$0.90 \leq M < 0.95$	0.08071 (448)	0.12925 (1061)	-0.00325 (533)	-0.00731 (141)	-0.04901 (88)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.04511 (1172)	0.06200 (2202)	-0.05962 (1288)	-0.02834 (559)	-0.07059 (563)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.01543 (539)	0.02570 (1172)	-0.07179 (771)	-0.01046 (460)	-0.07270 (491)
$M \geq 1.10$	0.00976 (722)	-0.00646 (5349)	-0.07630 (3253)	-0.02984 (1998)	-0.06949 (1781)

() 内はデータ数

4 実証分析：収益率分布の非正規性という観点からの考察

3.1での分析からも明らかなようにおおよそ日経225株価指数の収益率分布は、正規分布よりも急尖的な、あるいは、歪んだ分布に従っている。そして、この特徴はVG分布やNIG分布を用いることによって説明できる。そこで、現実の分布に近いVG分布などを前提とした場合、オプション価格の評価にどのような影響を与えるであろうか。本章では、この観点からの実証分析を行なった。

4.1 Fitness Analysis

本節では、収益率分布の非正規性という観点から幾何レヴィ過程モデルを用いた場合の、モデルの当てはまり度合いについて検証する。

ここで、当てはまり度合いの尺度としてaverage relative percentage error (ARPE) :

$$\text{ARPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|p_i - \eta_i|}{p_i}, \quad n : \text{オプションの数}$$

を用いる。ここに、 p は実際に観察されたオプションの市場価格であり、 η はオプションの理論価格である。また、誤差の尺度としてARPEの他にroot-mean-square error (RMSE) も計算した。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{|p_i - \eta_i|^2}{n}}$$

さらに、誤差のバイアスの有無を見るために平均誤差率 (MER : mean error rate) も計算した。

$$\text{MER} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i - \eta_i}{p_i}$$

まず、分析期間として1994年1月4日から1996年12月30日の過去3年間と2002年1月4日から2004年12月30日の過去3年間を選択した。ここで1994年1月4日から1996年12月30日を期間 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{743}\}$ で表すこととする。 A_1 は1994年1月4日を表すものとし、 A_2 はその翌日を表すことにする。以下、同様に $A_i, i = 1, 2, \dots, 743$ を定義する。また、2002年1月4日から2004年12月30日を期間 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_{737}\}$ で表すことにする。

この期間をそれぞれ選択した理由は表2より明らかであろう。すなわち、各 A_j の直近500営業日の間をサンプル期間として原証券の収益率分布を推定した場合には、他の期間より急尖的特徴を比較的強く持っている一方で、期間 B は全体的にとっても正規分布に近い期間であったからである。すなわち、期間 A に取引されたオプションは、その原証券の収益率分布が相対的に急尖的

な特徴を持っている期間に取引されたことになる。そして期間 B に実際に取引されたオプションは、原証券の収益率分布がかなり正規分布に近かった期間において評価されたものである。これら 2 つの期間におけるオプション評価の違いについて分析することで株価収益率の非正規性を捉えられるモデルを用いた場合の特徴が見えてくるであろう。

さて、本論文では、オプション C の理論価格 η は、確率測度 \mathbf{P} が与えられた下で、 $\eta = E_{\mathbf{Q}}[e^{-rT}C]$ 、 \mathbf{Q} : 同値マルチンゲール測度として計算されるものとしていた。したがって、 η_i , $i=1, \dots, n$ の値を得るには、確率測度 \mathbf{P} を推定しなくてはならない。本節では、オプション C の価格 η を次のようにして計算した。

A_1 の間に取引されたオプション C^{k,A_1} , $k=1, \dots, 20$ を評価するために、 A_1 の直近 500 営業日分 (1991年12月19日から1993年12月30日) をサンプル区間とした。ここで、500 営業日未満のデータ数で推定した場合には推定されたパラメータは不安定になる場合が多かったことから、500 営業日というのが安定的なパラメータ値を得るための一つの目安となるように思われる。そして、そのサンプル期間に観察された log return を使って最尤法により確率測度 \mathbf{P} を推定した。実際には、最尤推定量を解析的に求めることは必ずしも容易ではないため、数値解析的に計算した：

$$\text{SERCH } \theta : \sum_i \log f(\theta; x_i) \rightarrow \min.$$

ただし、実際の目的関数にはパラメータの制約条件を満たすようにペナルティ項を付与した。また、密度関数 $f(x; \theta)$, θ : モデル・パラメータは、解析的な形では与えられてはいないが特性関数の関数形は分かっているので、ここでは特性関数を逆フーリエ変換することで密度関数の値を数値解析的に求めている。ただし、NIG 分布に関してはその密度関数の形が陽に分かっているので、NIG 分布に関してはその関数から対数尤度を計算した。ここで、このようにして得られた確率を $\hat{\mathbf{P}}_{A_1}$ で表すこととする。この $\hat{\mathbf{P}}_{A_1}$ に基づいて計算されたオプション価格 $\hat{\eta}_k = E_{\hat{\mathbf{Q}}_{A_1}}[e^{-rT}C^{k,A_1}]$ をオプション C^{k,A_1} の理論価格とする。以下、同様にして各期間 A_j , $j=2, \dots, 40$ に対してオプションの理論価格を計算した。ここで、オプション価格は Carr and Madan [2] による FFT 法を使用する計算方法を用いて求めた。

これにより

$$\widehat{\text{ARPE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|p_i - \hat{\eta}_i|}{p_i}$$

が計算される。他の誤差の尺度に対しても同様である。この結果をまとめたものが表 10 である。同様にして期間 B に対しても分析を行なった。その結果をまとめたものが表 11 である。

この結果から分かるように、比較的 に正規分布よりも急尖的特徴を示していた期間に対して

は、幾何レヴィ過程モデルのほうが予測誤差が小さくなっていた。収益率分布が急尖の特徴を持った期間に対して、ブラック・ショールズモデルから幾何レヴィ過程モデルに拡張することでオプション評価のパフォーマンスが改善された点は大変興味深い。

そして、比較的正規分布に近かった期間に対しては、ブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルとはほとんど差は見られなかった。Jarque-Beraの検定結果からは、期間 B においても多くの日（全体の約 $2/3$ の期間）で正規性は棄却されてはいたが、尖度をみるとかなり正規分布に近かったことが分かる。幾何レヴィ過程モデルにおける収益率分布は、残存期間の増大と共に正規分布に近づくことが知られている。それゆえ、日率の収益率分布が正規分布よりも急尖的な、あるいは、歪んだ分布をしていて、他の幾何レヴィ過程モデルを用いた方が当てはまりがよいという結果が出ていたとしても、その程度がさほど大きくなければ、ブラック・ショールズモデルとほとんど差がないという結果は十分予想できる結果であったといえる。

本節の分析から、原証券の収益率分布に急尖の特徴が認められるときにはブラック・ショールズモデルにかえて幾何レヴィ過程モデルを用いることによって、オプション評価のパフォーマンスが向上する可能性があることをみた。とはいえ、対象とする分布はやはり正規分布に近く、実際の誤差の改善度はさほど高くなかったことも事実である。すなわち、現実に観察されるオプション価格の評価誤差の多くは原証券の収益率分布の非正規性以外の要因によってもたらされている可能性が高い。そして、注目すべきは、原証券の収益率分布の非正規性を捉えた下でのオプション評価誤差には、ITMに対しては理論モデルはオプション価格を実際の市場価格よりも過小に評価し、OTMでは過大評価するという傾向が観察できるということである。そして、正規分布にかなり近かった期間 B においても同様の傾向が見られるということである。このことは、現実のオプション価格の評価誤差には、原証券市場の非正規性以外の重要な要因が存在している可能性があることを示唆するものであるといえる。そして、この誤差の傾向はボラティリティ・スマイル（スキュー）としてよく知られている特徴である。そこで、次節ではボラティリティ・スマイルという観点から実証分析を行なった。

表 7 Out-of-Sample Pricing Errors : Term A

moneyness M K/S	Model (Measure)	Pricing Errors		
		ARPE	RMSE	MER
$M < 0.90$	Back-Scholes	0.03286	128.0522	0.03108
	Merton (MEMM)	0.03273	127.7976	0.03089
	VG (MEMM)	0.03308	128.4971	0.03149
	NIG (MEMM)	0.03275	127.7548	0.03093
<i>sample size</i>		{732}		
$0.90 \leq M < 0.95$	Back-Scholes	0.05237	107.9721	0.01778
	Merton (MEMM)	0.05194	107.3411	0.01764
	VG (MEMM)	0.05218	108.3608	0.02288
	NIG (MEMM)	0.05205	107.5908	0.01835
<i>sample size</i>		{1702}		
$0.95 \leq M < 1.00$	Back-Scholes	0.13738	125.9779	-0.05782
	Merton (MEMM)	0.13422	124.4152	-0.05236
	VG (MEMM)	0.12774	120.8360	-0.03558
	NIG (MEMM)	0.13361	124.2452	-0.05010
<i>sample size</i>		{3486}		
$1.00 \leq M < 1.05$	Back-Scholes	0.50047	127.6511	-0.37742
	Merton (MEMM)	0.48791	125.5763	-0.36856
	VG (MEMM)	0.45669	119.2297	-0.32200
	NIG (MEMM)	0.48284	124.6844	-0.36137
<i>sample size</i>		{4396}		
$1.05 \leq M < 1.10$	Back-Scholes	1.13510	88.8093	-0.86245
	Merton (MEMM)	1.12390	87.9220	-0.87094
	VG (MEMM)	1.04720	84.0649	-0.76660
	NIG (MEMM)	1.10790	87.0836	-0.85361
<i>sample size</i>		{2483}		
$1.10 \leq M$	Back-Scholes	0.84951	41.9785	0.05944
	Merton (MEMM)	0.84311	42.2937	0.03544
	VG (MEMM)	0.81236	42.3479	0.11928
	NIG (MEMM)	0.82924	41.7820	0.04651
<i>sample size</i>		{717}		
ALL	Back-Scholes	0.46018	115.2889	-0.28903
	Merton (MEMM)	0.45282	113.8933	-0.28760
	VG (MEMM)	0.42532	110.2531	-0.24382
	NIG (MEMM)	0.44734	113.4245	-0.28082
<i>sample size</i>		{13516}		

表 8 Out-of-Sample Pricing Errors : Term B

moneyness M K/S	Model (Measure)	Pricing Errors		
		ARPE	RMSE	MER
$M < 0.90$	BS	0.04641	162.9266	0.03246
	Merton (MEMM)	0.04635	162.7176	0.03225
	VG (MEMM)	0.04647	163.3379	0.03266
	NIG (MEMM)	0.04644	162.9752	0.03247
<i>sample size</i>		{3645}		
$0.90 \leq M < 0.95$	BS	0.07496	131.2571	-0.000383
	Merton (MEMM)	0.07502	131.1705	-0.000749
	VG (MEMM)	0.07523	132.0135	-0.000477
	NIG (MEMM)	0.07497	131.2762	-0.000473
<i>sample size</i>		{2002}		
$0.95 \leq M < 1.00$	BS	0.11039	103.0554	-0.04725
	Merton (MEMM)	0.10991	102.8789	-0.04620
	VG (MEMM)	0.11088	103.6471	-0.04774
	NIG (MEMM)	0.11002	103.0867	-0.04616
<i>sample size</i>		{2832}		
$1.00 \leq M < 1.05$	BS	0.22931	79.6829	-0.15556
	Merton (MEMM)	0.22754	79.5466	-0.15503
	VG (MEMM)	0.22641	80.2318	-0.15395
	NIG (MEMM)	0.22459	79.5350	-0.15130
<i>sample size</i>		{3547}		
$1.05 \leq M < 1.10$	BS	0.39543	68.7162	-0.25597
	Merton (MEMM)	0.39199	68.6788	-0.26120
	VG (MEMM)	0.38741	69.5143	-0.25337
	NIG (MEMM)	0.38569	68.6164	-0.25391
<i>sample size</i>		{3857}		
$1.10 \leq M$	BS	0.77903	48.9294	-0.51087
	Merton (MEMM)	0.78244	49.0493	-0.52420
	VG (MEMM)	0.76649	49.5847	-0.50591
	NIG (MEMM)	0.78449	49.1335	-0.54532
<i>sample size</i>		{13260}		
ALL	BS	0.45638	89.5693	-0.28581
	Merton (MEMM)	0.45721	89.5046	-0.29246
	VG (MEMM)	0.44934	90.1092	-0.28305
	NIG (MEMM)	0.45697	89.6105	-0.30060
<i>sample size</i>		{29143}		

5 実証分析：ボラティリティ・スマイルという観点からの考察

3.2節の分析からも分かるように、日経225コール・オプション市場においても、他の株価指数オプション市場同様、ボラティリティ・スマイルを観察することができる。

ボラティリティ・スマイルが観察されるということと、インプライドされたリスク中立密度関数が急尖的で歪んだ分布であることとは対応していることが知られている（ハル [9]）。この事実は、オプション市場の参加者が株価が急激に変化するリスクに対応できることにプレミアを感じている結果であると解釈でき、Rubinstein [18] による分析結果はそのことを実証的に裏付けるものといえる。市場参加者が、株価のジャンプ・リスクに対応できることにプレミアを感じるということはすなわち、市場参加者は今後株価が急激に変化することが十分起こり得ると想定しているということになる。そして、このことは株価指数オプションに対しても例外ではない。それゆえ、特に実務的な観点からは、原証券市場の情報だけではなく、オプション市場の情報も用いてオプション評価を行なうことが重要であり、ボラティリティ・スマイルが特に注目されている所以である。

ボラティリティ・スマイルを説明できるモデル（スマイル・モデル）とは、リスク中立密度関数が急尖的で歪んだ分布になることが可能なモデルである。それゆえ、[GLP&EMM] モデルは、そのリスク中立過程もレヴィ過程に従うことから、スマイル・モデルであることが容易に想像できよう。また、実際に、[GLP&EMM] モデルがスマイル・モデルのクラスに属していることも確認されている。

そこで、本節では、幾何レヴィ過程モデルに基づくオプション評価モデルが日経225コール・オプション市場で観察されたボラティリティ・スマイルに対してどの程度フィットするか調べた。

5.1 Fitness Analysis：カリブレーション問題

日経225コール・オプション市場では、ボラティリティ・スマイルが観察される。そこで、この特徴に対して幾何レヴィ過程がどの程度当てはまるのか、各 j , $j=1, 2, \dots, 12$ に対して

$$\text{SSE}_j(\theta) = \sum_i \left| C_i^{(m)}(\theta) - \hat{C}_i^{A_j^{2001}} \right|^2 \xrightarrow{\theta} \min$$

なるカリブレーション問題を数値解析的に解くことで分析を行なった。ここで、 A_1^{2001} とは2001年1月の1ヶ月間を表すものとし、 A_j^{2001} は2001年 j 月の1ヶ月間を表すものとする。また、 $C^{(m)}$ で理論価格を表すものとし、 \hat{C}^A は期間 A の間に実際に取引されたオプションの市場価格を表すものとする。ここで、オプションの理論価格の計算方法は前章と同様であるが、

[Merton & MCMM] モデルに関してはMerton [10] の公式を用いた。ここで、分析の対象期間を2001年としたのは、表5、6より、この期間が残存期間が短期（長期）の場合にはボラティリティ・スマイル（ボラティリティ・スキュー）が観察されるという傾向が顕著であったからである。

また、カリブレーション問題の性格上、ノイズが多く含まれているデータがあると推定結果が不安定になってしまう。そのため、ここでは、対象とするオプション価格として、残存期間（営業日ベース）が5日以下のものと250日より長いものは除外した。また、ATMから極端に外れたオプション（マニネスが0.8未満のもの1.2以上のもの）も除外した。除外したこれらのオプション価格は、いずれも流動性などの影響でノイズを含みやすいデータである。

表9 分析対象とした日経225ヨーロッパ型コールオプションの各マニネスにおける平均価格

moneyness	$0.80 \leq M < 0.90$	$0.90 \leq M < 0.95$	$0.95 \leq M < 1.00$
average price	2077.1925	1362.5892	930.6132
moneyness	$1.00 \leq M < 1.05$	$1.05 \leq M < 1.10$	$1.10 \leq M < 1.20$
average price	616.4946	400.8592	214.9851

この分析結果をまとめたものが表10、11である。表10、11から、幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルと比較して当てはまりのよいモデルであることが分かる。幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルよりもパラメータ数が多いため当てはまりがよくなるのはある意味当然の結果ともいえるが、ITM、OTMにおける誤差が改善されている点から、幾何レヴィ過程モデルを用いることでオプション市場の特徴であるボラティリティ・スマイルを説明できている点が重要である。さらに、この結果からは、当てはまりの良し悪しは必ずしも同値マルチンゲール測度としてどの測度を選択したかには依存しないことが分かる。この結果は大変興味深く、結果として、スマイル・モデルとしては各プロセスに対して数値計算の行ないやすいオプション評価モデル（同値マルチンゲール測度）を選択すればよい。

表10 Calibration Results

moneyness M K/S	Model (Measure)	Fitting Errors		
		RMSE	ARPE	MER
$0.80 \leq M < 0.90$	BS	222.4643	0.07516	0.05262
	Merton (MMM)	207.8630	0.07219	0.03232
	Merton (MCMM)	192.3287	0.06776	0.01725
	Merton (ESMM)	192.3472	0.06787	0.01644
	Merton (MEMM)	192.4219	0.06757	0.01697
<i>sample size</i>		{2351}		
$0.90 \leq M < 0.95$	BS	176.6221	0.09148	0.03197
	Merton (MMM)	170.6549	0.09122	0.00999
	Merton (MCMM)	166.2486	0.08819	0.00125
	Merton (ESMM)	166.6995	0.08929	0.00029
	Merton (MEMM)	166.2065	0.08877	0.00070
<i>sample size</i>		{1715}		
$0.95 \leq M < 1.00$	BS	147.1463	0.11271	0.00016
	Merton (MMM)	144.4296	0.11050	-0.00291
	Merton (MCMM)	145.1105	0.11099	0.00273
	Merton (ESMM)	146.2791	0.11329	0.00409
	Merton (MEMM)	145.5985	0.11271	0.00398
<i>sample size</i>		{1745}		
$1.00 \leq M < 1.05$	BS	110.4048	0.14228	-0.050055
	Merton (MMM)	107.5974	0.12864	-0.010649
	Merton (MCMM)	110.8786	0.14575	0.037696
	Merton (ESMM)	110.9169	0.14345	0.036871
	Merton (MEMM)	110.9470	0.14664	0.042057
<i>sample size</i>		{1850}		
$1.05 \leq M < 1.10$	BS	93.0555	0.21972	-0.11943
	Merton (MMM)	87.3083	0.18595	0.01634
	Merton (MCMM)	89.0010	0.21426	0.10770
	Merton (ESMM)	88.3433	0.21047	0.10783
	Merton (MEMM)	88.9693	0.21146	0.10884
<i>sample size</i>		{1896}		
$1.10 \leq M < 1.2$	BS	81.1689	0.39977	-0.23057
	Merton (MMM)	73.4062	0.45002	0.19620
	Merton (MCMM)	69.3510	0.35363	0.17153
	Merton (ESMM)	68.6999	0.37437	0.24909
	Merton (MEMM)	69.1783	0.33691	0.14870
<i>sample size</i>		{3625}		
ALL	BS	143.2457	0.20173	-0.07404
	Merton (MMM)	135.8649	0.20792	0.06149
	Merton (MCMM)	131.0261	0.18677	0.07155
	Merton (ESMM)	131.1236	0.19207	0.09270
	Merton (MEMM)	131.0951	0.18216	0.06609
<i>sample size</i>		{13182}		

表11 Calibration Results

moneyness M K/S	Model (Measure)	Fitting Errors		
		RMSE	ARPE	MER
$0.80 \leq M < 0.90$	BS	222.4643	0.07516	0.05262
	VG (ESMM)	198.6133	0.06941	0.02546
	VG (MEMM)	200.2100	0.06898	0.02613
	NIG (ESMM)	195.1200	0.06884	0.01680
<i>sample size</i>		{2351}		
$0.90 \leq M < 0.95$	BS	176.6221	0.09148	0.03197
	VG (ESMM)	168.9767	0.09181	-0.00102
	VG (MEMM)	168.6756	0.09031	0.00052
	NIG (ESMM)	166.1658	0.08864	-0.00035
<i>sample size</i>		{1715}		
$0.95 \leq M < 1.00$	BS	147.1463	0.11271	0.00016
	VG (ESMM)	146.1750	0.11446	-0.00766
	VG (MEMM)	146.6616	0.11594	-0.01188
	NIG (ESMM)	144.7869	0.11210	-0.00294
<i>sample size</i>		{1745}		
$1.00 \leq M < 1.05$	BS	110.4048	0.14228	-0.050055
	VG (ESMM)	113.4038	0.15892	0.041321
	VG (MEMM)	111.8871	0.16392	0.040759
	NIG (ESMM)	107.8982	0.13323	0.000331
<i>sample size</i>		{1850}		
$1.05 \leq M < 1.10$	BS	93.0555	0.21972	-0.11943
	VG (ESMM)	89.6834	0.20770	0.06236
	VG (MEMM)	89.4716	0.23660	0.11357
	NIG (ESMM)	83.6774	0.17393	-0.04993
<i>sample size</i>		{1896}		
$1.10 \leq M < 1.2$	BS	81.1689	0.39977	-0.23057
	VG (ESMM)	71.1094	0.32633	0.00628
	VG (MEMM)	71.1659	0.36043	0.13422
	NIG (ESMM)	66.9772	0.47972	0.13375
<i>sample size</i>		{3625}		
ALL	BS	143.2457	0.20173	-0.07404
	VG (ESMM)	133.9066	0.18139	0.01989
	VG (MEMM)	134.1603	0.19555	0.06212
	NIG (ESMM)	130.5066	0.21428	0.03221
<i>sample size</i>		{13182}		

6 結語

本分析において、急尖の特徴が比較的に強く現れている期間に対しては、幾何レヴィ過程モデルに拡張することでブラック・ショールズモデルよりもオプション価格評価のパフォーマンスが改善されることが確認できた。また、正規分布に近い期間においてはブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルはほとんど差がないことも確認できた。この結果からは、モデルの扱いやすさを考慮に入れないとすれば、ブラック・ショールズモデルにかえて幾何レヴィ過程モデルに拡張することによってオプション価格評価のパフォーマンスを向上させることが可能であることが分かった。ただし、原証券市場の非正規性を考慮に入れたとしても、オプション評価誤差は多く残っていた。つまり、日経225コールオプションの評価誤差は原証券市場の非正規性以外の要因に強く影響されていることがわかった。そして、この誤差にはボラティリティ・スマイルという特徴が観察された。そこで、ボラティリティ・スマイルという観点からの分析を行なった。

ボラティリティ・スマイルという観点から幾何レヴィ過程モデルについて分析を行なったところ、日経225コール・オプションに対して幾何レヴィ過程モデルはスマイル・モデルとして有用なモデルであることが分かった。幾何レヴィ過程モデルを用いることで、マネネスに関するブラック・ショールズモデルと市場価格との乖離に対する一定の傾向（ボラティリティ・スマイル）が改善されたことは意義深い。オプション市場の参加者が想定する将来の収益率分布は、必ずしも実際の原証券市場の過去の動向から推定されるものとは一致しないであろう。Rubinstein [18]の実証結果からも分かるように、オプションの市場参加者は将来において原証券が急激に変化することが十分起こり得ると想定しているといえる。そして、幾何レヴィ過程モデルを用いることでオプション市場参加者の将来に対する予想を汲み上げることが可能となろう。

ただし、スマイル・モデルとして幾何レヴィ過程モデルに拡張した場合でも市場価格と理論価格との間にはまだ誤差が存在している。したがって、今後の課題としては、ジャンプ・リスクの影響を除いた後の誤差に、ある種の傾向が見られるか分析を行ない、その誤差が純粋にノイズといえるかどうか考察を行ないたい。また、誤差に傾向が見られた場合には、理論モデルに欠けている要因を突き止め、すでにある理論モデルで説明可能かどうか実証分析を行ない、従来のモデルで対応できない場合には新たなモデルの構築にも取り組みたい。ボラティリティ・スマイルは、期間構造を有しており、また、その形状は時間と共に変化することが指摘されている。したがって、残存期間に関する特徴については今後取り組むべき課題といえる。

各理論モデルの妥当性の検証（同値マルチンゲール測度の選択の問題）は分析すべき重要な課題である。しかしながら、今回の分析ではこの観点からの考察については十分な分析が行なえたわけではない。これは、分析の対象としたデータの収益率分布が正規分布に近かったからに他ならない。そこで、今後の課題としては、収益率分布が正規分布よりも明らかに歪んでいる、あるいは、急尖的である対象で同様の分析を行う必要がある。その対象としては、通貨オプションが

考えられる。

また、今回は、日経225コール・オプションを対象として分析を行なったが海外の同様の市場に対しても分析を行ない、日本の市場に特有な傾向が存在するのかという点についても分析を行ないたい。

最後に、Miyahara and Moriwaki [14] から分かるように、[G-Stable & MEMM] モデルはスマイル・モデルとして大変有用なモデルである可能性が高い。しかし、今回の分析を行なって分かったが、[G-Stable & MEMM] モデルは、経験的に言えば正規分布にかなり近い場合 (α が 2 に近い場合 (1.8台がグレーゾーン)) を対象にした場合、それなりの精度を得ようとするとき数値計算に相当程度の時間が必要となった。したがって、[G-Stable & MEMM] モデルは、正規分布からそれなりに乖離している場合には现阶段でも十分実用に耐え得るであろうが、日経225コール・オプションに適用することは難しい。[G-Stable & MEMM] モデルは、大変興味深いモデルであるので、実用レベルに耐え得るような数値計算方法についても考えていきたい。

参考文献

- [1] Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 5, 1997.
- [2] Carr, P. and Madan, D. B., Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, 1998, pp. 61–73.
- [3] Chan, T., Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes, *The Annals of Applied Probability*, Vol. 9, No. 2, 1999, pp. 504–528.
- [4] Cont, R. and Fonseca, J., Dynamics of implied volatility surfaces, *Quantitative finance*, Vol. 2, 2002.
- [5] Dumas, B., Fleming, J., and Whaley, R. E., Implied volatility functions: Empirical tests, *Journal of Finance*, Vol. 53, No. 6, 1998, pp. 2059–2106.
- [6] Föllmer, H. and Schweizer, M., Hedging of contingent claims under incomplete information, In Davis, M. H. A. and Elliott, R. J., editors, *Applied Stochastic Analysis*. Gordon and Breach, 1990, pp. 389–414.
- [7] Fujiwara, T. and Miyahara, Y., The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes, *Finance and Stochastics*, Vol. 7, 2003, pp. 509–531.
- [8] Hafner, R. and Wallmeier, M. The Dynamics of DAX Implied Volatilities, 2000. preprint.
- [9] ジョン・ハル, 『フィナンシャルエンジニアリング』. 金融財政事情研究会, 5, 2003年.
- [10] Merton, R. C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 1976, pp. 125–144.
- [11] Miyahara, Y., [Geometric Lévy processes & MEMM] pricing model and relating estimation problems, *Asian-Pacific Financial Markets*, Vol. 8, No. 1, 2001, pp. 45–60.
- [12] 宮原孝夫, 『株価モデルとレヴィ過程』. 金融工学の基礎 1. 朝倉書店, 2003年.
- [13] Miyahara, Y., The [GLP & MEMM] Pricing Model and Related Problems, In Akahori, J., editor, *Proceedings of the 5th Ritsumeikan International Symposium Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance*, 2006, pp. 125–156.
- [14] Miyahara, Y. and Moriwaki, N., volatility smile / smirk properties of [GLP & MEMM] models, 京都大学数理解析研究所研究録1462「確率数値解析における諸問題、VII」, 2006, pp. 156–170.
- [15] Ncube, M., Modelling implied volatility with ols and panel data models, *Journal of Banking & Finance, Elsevier*, Vol. 20, 1996, pp. 71–84.
- [16] Pena, I., Rubio, G., and Serna, G., Why do we smile ? on the determinants of the implied volatility function, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 23, 1999, pp. 1151–1179.
- [17] Rubinstein, M., Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active cboe option classes

- from august 23, 1976 through august 31, 1978, *The Journal of Finance*, Vol. XL, No. 2, 1985, pp. 455–480.
- [18] Rubinstein, M., Implied binomial trees, *The Journal of Finance*, Vol. LXIX, No. 3, 1994, pp. 771–818.
- [19] Sato, K., *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [20] Schoutens, W., *Lévy process in finance*. WILEY, 2003.

(2006年5月23日受領)

平成18年9月1日発行

編集者 名古屋市立大学経済学会
名古屋市瑞穂区瑞穂町字山の畑1

印刷所 株式会社正鶴堂