名古屋市立大学経済学会

オイコノミカ

第 46 巻　第3号

［講義ノート］

数理ファイナンス入門

（リスク・マネジメントの基礎）

宮　原　孝　夫

平　成　22　年　2　月　1　日　発　行

オイコノミカ　第46巻　第３号，2010年，pp.3-50

［講義ノート］

数理ファイナンス入門

（リスク・マネジメントの基礎）

宮　原　孝　夫

まえがき

本稿は，名古屋市立大学経済学研究科および経済学部での「数理ファイナンス」ないしはそれに関連したリスク分析の講義を元に，そこで使用した資料などを「講義ノート」という形式でまとめたものである．そこでの関心事は次のような項目である．

・リスクの評価法

・オプションの評価と価格付け

・プロジェクトの価値評価法

講義の際の参考資料（レジメ）というべきものであるのできちんとした書物としての体裁は取っておらず，講義の中で多くの説明を加えていくことを想定したものとなっている．

そのため，この「講義ノート」だけを読んで理解することは，初学者には困難であろう．しかし，不十分ではあっても「数理ファイナンス」の概要を感得することは可能であろう．また，すでにこの分野のことを学んでいる方には，行間を補いつつ筆者の「数理ファイナンス」研究の意図や考え方（フィロソフィー）を読み取っていただけるのではないかと思っている．

今後この方面の講義に携わる機会があれば，この「講義ノート」を基礎に，それを発展させた形で講義を進めたいと考えている．さらに，将来の適当なときにこの「講義ノート」をきちんとした成書の形にし，この方面の学習者・研究者の役に立てるようにすることも考えていきたい．

目次

第１章　序：現代ファイナンスの特徴

1.1　ファイナンスとは何か

● ファイナンスの定義：

「ファイナンス（finance）は，時間軸上において，希少資源をどのように配分するかを研究する学問」（ボディ=マートン）

・「ファイナンス」に近い日本語として，「金融」：資金を融通すること．

・ファイナンス（finance）は，金融，財政，財務，家計，を含んだ用語．

・経済主体との関係：個人（世帯）→ 家計

企業 → 財務

政府 → 財政

1.2　経済のグローバル化と不確実性の増加

● 経済の分野において，将来の予測は重要である．

・将来的な変動：景気変動，物価変動，株価の変動，為替レートの変動，など．

・将来の予測：景気の予測，株価予測，為替レートの予測，など．

・これらの問題には，不確実性とリスクが付随している．

・経済のグローバル化・スピードアップにより不確実性とリスクが増大している．

・そのため，予測の信頼性が低下している．

● 現代ファイナンスのキーワードは「リスク（Risk）」である．

・（自然界や地政学的リスクも含めて）不確実性とリスクが増加している．

・リスク回避の必要性 →「保険」，「リスクの分散」，「リスク移転」，「リスクヘッジ」

・「リスクを取る」ことが必要な場合もある．

・研究開発，資源開発，事業の拡大，ベンチャービジネス，起業，など．

・→ リアルオプションと経営戦略

● ファイナンスにおけるリスク

・市場リスク，

・信用リスク，

・オペレーショナルリスク，

・流動性リスク，

・金利リスク，為替リスク，etc.

● ⇒［リスクの適切な評価法］の必要性．（本稿の主要なテーマである）

1.3　リスクへの対応

● リスクへの態度と扱い

リスク分析，リスク評価，リスクマネジメント，リスク回避（リスクヘッジ），リスク移転（リスクの証券化），リスクを取る，etc.

● 研究課題

１．リスクとは何か？（その定義・概念を明確にすること.）

・予測の困難性，不可能性　→　確率論の重要性

（ピーター・バーンスタイン「リスク」（上，下）日経ビジネス文庫714）

２．リスクの評価法を確立.

・平均と分散（標準偏差）

・VaR

・リスク尺度

３．リスクへの対応策の検討.

・保険

・リスクマネジメント

・リスクの分散（分散投資，ポートフォリオ理論）

・リスク移転（証券化）

・リスクヘッジ（デリバティブの利用）

４.「リスクを取る」場合の企業戦略の検討.

・研究開発，ベンチャービジネス，起業，などに対する対応.

・大きな不確実性のもとでのリアルオプション・アプローチの有効性.

● 注意

・リスクマネジメント，数理ファイナンス，金融工学（デリバティブ）などの新しいファイナンス理論の重要性は，銀行，証券などの分野だけでなく，保険（アクチュアリー）や一般企業のコーポレートファイナンスにおいても注目されるようになってきている.

・コーポレート・ファイナンスの最近のテキストでは，「リスク」に関する記述が多くを占めている．

1.4　リスク理論と確率モデル

・リスクを扱うための理論と道具：確率論と統計学が基本である．

● 従来の方法

1）統計学（平均，分散，正規分布）と計量経済学

2）アクチュアリー(保険数学)：寿命，事故の発生件数等の予測，適切な掛け金の算出，などに統計学を駆使している．

・平均と分散で分ること：平均・分散分析，それに基づく最適投資理論

・リスク回避の方法 →（従来は）保険，（新しいものとして）デリバティブ

● 現代のリスク分析：確率論の重要性が増している．金融ビッグバン，金融工学，数理ファイナンス，デリバティブの活用．

・会計，企業ファイナンスに関して，最近注目されている２つの話題

1）ストック・オプション（自社株取得権）の評価：会計基準の変更によりストック・オプションの評価が必要．オプションの価格理論が基礎．

2）プロジェクトの価値評価（事業評価，企業評価(ベンチャービジネス)，知的財産の評価，未公開企業の評価，等）：これらの問題に対する新しい方法は，企業ファイナンスのあり方を変える可能性がある．

1.5　期待効用とリスク

効用関数$u(x)$とは，$[0,\infty)$ または $(-\infty,\infty)$ 上で定義された関数で，xなる収益（リターン）を得た場合の効用が$u(x)$であるとみなされるものである．条件$u(0)=0$を仮定することが多い．効用関数は単調増加で上に凸な関数であると仮定される場合が一般的であるが，必要に応じていろいろなタイプの効用関数が採用されている．

将来的なリターンは不確実なものとして確率変数であると考える．Xをリターンとした場合，$E[u(X)]$はリターンXの期待効用と呼ばれる．

リスクに対する態度は，効用関数の形に反映されている．

・$u(x)=x$の場合，リスクへの意識無し．

・$u(x)=-ax^2+bx$，$(a,b,>0)$の場合，リスクは分散で測られている．

・リスク回避的：$u(x)$が上に凸の場合．$E[u(X)]\le u(E[X])$となる．

・リスク中立的：$u(x)=ax$の場合．$E[u(X)]=aE[X]$となる．

・リスク愛好的：$u(x)$ が下に凸の場合．$E[u(X)] \geq u(E[X])$ となる．

1.6　リスクの計量（数量化）

リスクの大きさを数値化して表現する方法がいくつか考えられている．

１）分散(標準偏差)

２）VaR（Value at Risk）

３）確実性等価

４）効用無差別価格

５）リスク尺度（risk measure）

1.7　企業のリスク管理　ERM（Enterprise Risk Management）

● 投資戦略とリスク管理

・ポートフォリオ理論：第５章，第８章

● リスク評価とリスク管理

・オプション価格理論：第10章

・プロジェクト評価とリアル・オプション：第11章，第12章

● 企業価値評価とERM

・ERM（enterprise risk management）の重要性

1.8　数理ファイナンス理論と金融工学の役割

● 数理ファイナンス理論の役割

・リスク評価の基礎理論の確立.

・金融オプションの理論およびリアル・オプションの理論.

・事業価値および投資戦略の評価.（価値評価）

● 金融工学の役割

・数理ファイナンス理論の成果の応用と実現

・新商品の開発（リスク・ヘッジに利用可能なデリバティブの開発）

・企業の財務基盤の強化（リスク・ヘッジの実現）

・リスクの分散法，リスクの証券化法の開発

● リアルオプションと経営戦略

第２章　金融市場

2.1　金融資産

金融資産には次のような物がある．

・通貨（貨幣）

・証券：預貯金，債権（国債，社債），株式，等

・金融派生商品（＝デリバティブ，証券の一種である）：先物，スワップ，オプション，の３つが代表的なものである．

「金融派生商品」に対して，その元になる資産（従来からある資産）は「金融原資産」と呼ばれる．

2.2　金融システム

金融商品の取引される市場が金融市場である．取引される金融商品に応じて異なる市場がある．金融商品の売買を仲介するのが金融仲介機関である．それらの全体が金融システムを構成している．

・金融仲介機関：銀行，証券会社，保険会社

・金融市場：証券市場，債券市場，先物市場，銀行間市場，店頭市場

・政府と中央銀行：金融市場の監視，金融政策

2.3　金融市場の性質

・市場の効率性

・均衡価格

・一物一価の法則

・裁定取引

・裁定の非存在

・複製ポートフォリオ

・裁定理論と市場の効率性

第３章　資産の評価

3.1　金利計算

・単利と複利

・複利計算（実務では，年利での複利計算が基本）

・連続複利（瞬間複利）（理論的には，これが都合よい）

・債権の金利

3.2　収益率

・収益（＝リターン$= S_{t+1} - S_t$）

・収益率（=$R = \frac{S_{t+1}-S_t}{S_t} = \frac{\Delta S_t}{S_t}$）

・log return（=$\log S_{t+1} - \log S_t = \log \frac{S_{t+1}}{S_t} = \log \frac{S_t+\Delta S_t}{S_t} = \log\{1 + \frac{\Delta S_t}{S_t}\} = \frac{\Delta S_t}{S_t} + \cdots = R + \cdots$）

：収益率の近似値.

3.3　キャッシュフローの価値評価

・現在価値（PV，present value）と将来価値（FV，future value）

・割引率

・内部収益率（IRR，inner rate of return）

3.4　ランダムなキャッシュフローの価値評価

・RPVの導入（高度な議論が必要になる）

3.5　金利モデル

・短期金利と長期金利

・金利の期間構造：$r(t, T)$

第４章　確率論の基礎

4.1　確率

4.1.1　公理論的確率の定義

Definition 1（確率空間）（$\Omega, \mathcal{F}, P$）が確率空間であるとは$\Omega, \mathcal{F}, P$がそれぞれ次の条件を満たしていることである．

(1) Ω（標本空間）

Ωは，或る集合である．

(2) $\mathcal{F}$（事象の空間）

$\mathcal{F}$はΩの部分集合を要素に持つ集合の族で，次の性質を持つ．

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$

(b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ （A^cはAの補集合を表す）

(c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$

(3) P（確率）

Pは$\mathcal{F}$上で定義された実数値関数で，次の性質を持つ．

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$，$A \in \mathcal{F}$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ で互いに素（$i.e.\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ if\ i \neq j$）

$$\Rightarrow P(\textstyle\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$$

場合の数による確率

順列：${}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$

組み合わせ：

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = n!/r!(n-r)!, \quad (0! = 1)$$

二項係数：

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^r y^{n-r}$$

確率分布

R^d上で定義された確率を「d次元確率分布」という．

例：２項分布，正規分布

4.1.2　条件付き確率と独立性

条件付き確率： $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$

乗法公式： $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

独立性： A と B が独立 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

三つの事象の場合：どの２つの事象も互いに独立であり，その上で

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

ベイズの公式： $P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i)/\{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)\}$

4.2　確率変数

4.2.1　確率変数とその分布

Definition 2（確率変数）　確率変数とは，Ω 上で定義された実数値可測関数のことである．

Definition 3（確率変数の分布）

確率変数 X の分布 $P_X(\cdot)$： $P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$

確率変数 X の分布関数 $F_X(x)$：$F_X(x) = P(X \leq x)$

離散分布の確率関数： $P(X = a_i) = p_i, i = 1, 2 \ldots,\quad \sum_i p_i = 1$

連続分布の密度関数： $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

4.2.2　期待値と分散

期待値： $E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$

$$E[X] = \sum_i a_i p_i, \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx,$$

$$E[\phi(X)] = \sum_i \phi(a_i)p_i, \quad E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx$$

分散： $V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

期待値の性質： $E[aX + b] = aE[X] + b$

分散の性質： $V[aX + b] = a^2 V[X]$

正規化： $T = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}}$，とする．このとき， $E[T] = 0, V[T] = 1$

4.2.3　分布の例

離散分布

・二項分布　$B(n, p),\quad n = 1, 2, \ldots, 0 \leq p \leq 1$：

$$P(X = r) = {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, \ldots, n$$

$$E[X] = np, \quad V[X] = np(1-p)$$

・Poisson分布　$P_o(\lambda), \quad \lambda > 0$：

$$P(X=r) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}, \quad r = 0, 1, \ldots.$$

$$E[X] = \lambda, \quad V[X] = \lambda$$

連続型分布

・正規分布　$N(m, \sigma^2), \quad -\infty < m < \infty, \sigma^2 \geq 0$：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$E[X] = m, \quad V[X] = \sigma^2$$

$X \sim N(m, \sigma^2)$ のとき，$Z = \frac{X-m}{\sqrt{\sigma^2}}$ とおくと，$Z \sim N(0,1)$

・一様分布　$U(a, b), \quad a < b$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

・指数分布　$E(\lambda), \quad \lambda > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.3　多次元確率変数とその分布

4.3.1　多次元確率変数

Definition 4（多次元確率変数）　d-次元確率変数 $\mathbf{X}$ とは，Ω 上で定義された $\Re^d$ に値をとる可測関数

$$\mathbf{X} = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}) : \Omega \longrightarrow \Re^d$$

のことである．

Definition 5（多次元確率変数の分布）

多次元確率変数 $\mathbf{X}$ の分布 $P_{\mathbf{X}}(\cdot)$ とは，$P_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) = P(\{\omega \in \Omega | \mathbf{X}(\omega) \in B\}$ により定まる $\Re^d$ 上の確率分布のことを言う．

4.3.2　離散型と連続型の多次元分布

２次元離散分布：$P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \ldots, \sum_{i,j} p_{ij} = 1.$

２次元連続分布：$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy;$

$$f(x,y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

4.3.3　同時分布と周辺分布

２次元の分布が与えられたとき，次のような１次元分布（周辺分布）が定義される．

$$\text{周辺分布：}\begin{cases} p_i = P(X = a_i) = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, \\ q_j = P(Y = b_j) = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \end{cases}$$

4.3.4　独立性

- 独立性：XとYが独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{離散の場合：} \ p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j} = p_i q_j, \\ \text{連続の場合：} \ f(x,y) = f_X(x) f_Y(y). \end{cases}$$

- $X+Y$の分布：XとYは独立とする．

・離散の場合：X, Yは整数値を取るものとする．

$$P(X+Y=k) = \sum_i p_i q_{k-i},$$

・連続の場合：

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

4.3.5　期待値と分布の特性値

・期待値：$E[\phi(X,Y)] = \sum_{i,j} \phi(a_i, b_j) p_{ij}$

$E[\phi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y) f(x,y) dxdy$

・共分散：$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

・相関係数：$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}}$

・独立なとき：XとYが独立 $\Rightarrow$ $E[XY] = E[X]E[Y]$,

$Cov(X,Y) = 0$,　$\rho_{X,Y} = 0$

・期待値の性質：$E[a\phi(X,Y) + b\psi(X,Y)] = aE[\phi(X,Y)] + bE[\psi(X,Y)]$

・分散の性質：$V[aX+bY] = a^2V[X] + 2abCov(X,Y) + b^2V[Y]$

XとYが独立 $\Rightarrow$ $V[aX+bY] = a^2V[X] + b^2V[Y]$

・相関係数$\rho_{X,Y}$の３つの性質

(1)　$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$,

(2)　XとYが独立 $\Rightarrow$ $\rho_{X,Y} = 0$,

(3)　$\rho_{X,Y} = \pm 1 \Leftrightarrow X$と$Y$は一次式の関係.

4.3.6　２次元正規分布，多次元正規分布

・２次元正規分布

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\}$$

・n 次元正規分布

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sqrt{|\mathbf{A}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle \mathbf{x}-\mathbf{m}, \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\rangle\right\}$$

4.4　極限定理

4.4.1　チェビシェフの不等式と大数の法則

チェビシェフの不等式

$$P(|X-m| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

大数の法則

$$\forall\epsilon, \lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - m| > \epsilon) = 0 \qquad \text{（大数の弱法則）}$$
$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = m) = 1, \qquad \text{（大数の強法則）}$$

4.4.2　中心極限定理

中心極限定理： $\lim_{n\to\infty} P(a < \frac{\overline{X_n}-m}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$

（標本平均を正規化した確率変数の分布は，標本数 n が十分大きいとき N(0,1) に近い）

4.4.3　二項分布の正規近似

二項分布の正規近似： B(n,p) は， n が十分大きいとき N(np,np(1-p)) に近い

4.4.4　度数分布と母集団分布

相対度数分布は，母集団分布に近づく．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{j|x_j \in B\}}{n} = P_X(B)(= P(X \in B))$$

確率変数 $Y_j, j = 1, 2, \ldots,$ を

$$Y_j = \begin{cases} 1 & if \quad X_j \in B \\ 0 & if \quad X_j \in B^c \end{cases}$$

と定義して，大数の法則を使う．

4.5 条件付期待値

4.5.1 有限分割と情報

前に条件付確率 $P(B|A)$ を定義したが，これを情報という概念と関連付けた考察もできる．すなわち，条件付確率 $P(B|A)$ は「事象 A が起こったという情報が与えられたときに，その情報を知った上で事象 B の起こる確率」を考えているといえる．

この議論を少し一般化して，次のようなことが言える．起こりうる結果の全体（$=\Omega$）を k 個の集合に分割して（すなわち，$A_i \cap A_j = \emptyset$, if $i \neq j$ で $\bigcap_i A_i = \Omega$），その中のどれが起こったかを知る情報源を持っているとする．このような人にとって必要な確率の情報は，単なる確率 $P(B)$ ではなく，$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ のうちのどれが起こったかがわかった上での条件付確率 $P(B|A_i), i = 1, 2, \ldots, k$ であると言える．

上のような $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ を Ω の有限分割とよび，これから生成される σ -fieldを $\mathcal{A}$ とおく．このとき

$$P(B|\mathcal{A})(\omega) = P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}, \quad if \quad \omega \in A_i, \tag{4.1}$$

により定義される $P(B|\mathcal{A})(\omega)$ を，分割 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ の下での（または σ -field $\mathcal{A}$ の下での）B の条件付確率と呼ぶ.

さらに，確率変数 X の条件付期待値 $E[X|\mathcal{A}](\omega)$ が次式により定義される．

$$E[X|\mathcal{A}](\omega) = \frac{E[X1_{A_i}]}{P(A_i)} = \frac{\int_{A_i} X(\omega)dP(\omega)}{P(A_i)}, \quad if \quad \omega \in A_i. \tag{4.2}$$

ここで，1_A は集合 A の定義関数である．

条件付確率 $P(B|\mathcal{A})(\omega)$ も条件付期待値 $E[X|\mathcal{A}](\omega)$ も，ともに Ω 上の $\mathcal{A}$ 可測な関数であることを注意しておこう．

定義から容易に次のことが分かる．

$$P(B|\mathcal{A})(\omega) \quad = \quad E[1_B|\mathcal{A}](\omega) \tag{4.3}$$

$$E[E[X|\mathcal{A}]] \quad = \quad E[X] \tag{4.4}$$

4.5.2 条件付期待値とその性質

うえで有限分割から生成されている σ -fieldに対して条件付確率および条件付期待値を定義した．この概念は，一般的な σ -fieldにまで拡張して考えることができる．

Definition 6 X を確率空間（Ω, $\mathcal{F}$, P）上の可積分な確率変数とし，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ -*field*とする．このとき，確率変数 X の条件 $\mathcal{G}$ の下での条件付期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ とは，次の条件を満たす $\mathcal{G}$ 可測な確率変数 $\hat{X}(\omega)$ のことである．

$$\forall A \in \mathcal{G}, E[\hat{X}1_A] = E[X1_A], \tag{4.5}$$

条件付期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ は Ω 上の $\mathcal{G}$ 可測な確率変数であり，$P-a.e.$ の意味で一意的に定まることが言えている．

ここで条件付期待値のもっている性質をまとめておくことにする．

$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ とし，確率変数の可積分性は保障されているものとする．

１）（線形性） $E[aX+bY|\mathcal{G}]=aE[X|\mathcal{G}]+bE[Y|\mathcal{G}]$

２） $X\leq Y\Rightarrow E[X|\mathcal{G}]\leq E[Y|\mathcal{G}]$

３） $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2\subset\mathcal{F}\Rightarrow E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=E[X|\mathcal{G}_1]$

この特別な場合として， $E[E[X|\mathcal{G}]]=E[X]$

４）X が $\mathcal{G}$ 可測のときには， $E[XY|\mathcal{G}]=XE[Y|\mathcal{G}]$

５）X が $\mathcal{G}$ と独立（i.e. $\forall A\in\sigma(X)$ と $\forall B\in\mathcal{G}$ に対して, A と B は独立）なとき，$E[X|\mathcal{G}]=E[X]$

６）関数 $f(x)$ がconvex（下に凸）のとき， $f(E[X|\mathcal{G}])\leq E[f(X)|\mathcal{G}]$

条件付き期待値の定義において，確率変数 X として事象 A の定義関数を取ったとき，すなわち $E[1_A|\mathcal{G}]$ のことを条件 $\mathcal{G}$ の下での A の条件付き確率と呼び $P(A|\mathcal{G})$ とも表現される．

条件付分散： $V[X]=E[(X-E[X])^2]$

$$\begin{aligned}
E[X|\mathcal{G}]^2 &\leq E[X^2|\mathcal{G}] \\
V[E[X|\mathcal{G}]] &\equiv E[(E[X|\mathcal{G}]-E[E[X|\mathcal{G}]])^2] \\
&= E[E[X|\mathcal{G}]^2]-E[E[X|\mathcal{G}]]^2 \\
&\leq E[X^2]-E[X]^2=V[X]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[X|\mathcal{G}] &\equiv E[(X-E[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}] \\
&= E[(X^2-2E[X|\mathcal{G}]X+E[X|\mathcal{G}]^2)|\mathcal{G}] \\
&= E[X^2|\mathcal{G}]-E[X|\mathcal{G}]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[V[X|\mathcal{G}]] &= E[X^2]-E[E[X|\mathcal{G}]^2] \\
&\leq E[X^2]-E[E[X|\mathcal{G}]]^2 \\
&= E[X^2]-E[X]^2=V[X]
\end{aligned}$$

4.6　確率過程

・確率空間：（Ω, $\mathcal{F}$, P）

・フィルトレイション(filtration)：$\{F_t, t=0.1,2,\ldots.\quad or\quad t\geq 0\}$

・確率過程： $X(t,\omega)=X_t(\omega)$: $[0,\infty)\times\Omega$ 上で定義された可測関数で， F_t–adaptive

$X(t,\omega)$ は，ω を固定したときには t の普通の意味の関数であり， t を固定したときには確率変数である．

・離散時間モデルと連続時間モデル

第５章　証券市場モデル

5.1　平均・分散分析

・安全資産と危険資産：安全資産とは，その価格が一定の固定された利率で変動（上昇または下降）する金融商品．危険資産とは，その価格がランダムに変動する金融商品．債権（bond）は安全資産，株式（stock）は危険資産とされる．

・ポートフォリオ：手元の資金を安全資産および種々の危険資産に配分して投資するときの比率，または投資額.（投資戦略と同義にも使う）

・ポートフォリオ理論：平均・分散分析による最適投資理論

本節では，現在主流となっている証券市場モデル理論の解説を行う．平均・分散分析を基本とした統計的な視点よりなされている理論である．

5.1.1　２証券の場合

R_1, R_2：２証券の収益率

$\mu_i = E[R_i],\quad \sigma_i^2 = V[R_i],\quad i = 1, 2,$

$\sigma_{12} = Cov(R_1, R_3),\quad \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$

$(x_1, x_2),\quad x_1 + x_2 = 1$：ポートフォリオ

$R_p = x_1R_1 + x_2R_2$：ポートフォリオの収益率

$$\begin{aligned} \mu &= E[R_p] = x_1E[R_1] + x_2E[R_2] = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \\ \sigma^2 &= V[R_p] = x_1^2V[R_1] + 2x_1x_2Cov(R_1, R_2) + x_2^2V[R_2] \\ &= x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + x_2^2\sigma_2^2 \\ (&= x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2) \end{aligned}$$

$x_1 + x_2 = 1$ を使って x_1, x_2 を消去する．（$\mu_1 \neq \mu_2$ と仮定する）

$$\sigma^2 = A\mu^2 - 2B\mu + C = A\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \tag{5.1}$$

ここで，A, B, C は $\{\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_{12}, \sigma_2^2\}$ より定まる定数である．

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2\right) \\ B &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left(\mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\sigma_{12} + \mu_1\sigma_2^2\right) \\ C &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left(\mu_2^2\sigma_1^2 - 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_2^2\right) \\ AC - B^2 &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \end{aligned}$$

- (μ, σ^2) の軌跡は放物線で，頂点は $\left(\frac{B}{A}, \frac{AC-B^2}{A}\right)$ である．

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \frac{\mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1+\mu_2)\sigma_{12} + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2} \\ \frac{AC-B^2}{A} &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}\end{aligned}$$

- $A \geq 0$ である．（$\because 0 \leq V[R_1 - R_2] = \sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2$）
- $AC - B^2 \geq 0$ である．（$\because$ 分散共分散行列は非負定値である．）
- $AC - B^2 = 0$ の場合： $\rho(R_1, R_2) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ に注意すると，

$$AC - B^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow \rho(R_1, R_2) = \pm 1$$

となり，相関係数が $\rho(R_1, R_2) = \pm 1$ の場合である．

このとき(5.1)式は

$$\sigma^2 = A\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2 \tag{5.2}$$

となる．

(5.2)式より (μ, σ) の軌跡は直線であることがわかる．より詳しくは，次のようになっている．

1） $\rho(R_1, R_2) = 1$ 　の場合：

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2$$

より， $x_1, x_2 \geq 0$ の範囲で考えて，符号のことを考慮して

$$\sigma = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$$

を得る．これと， $\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2$ および $x_1 + x_2 = 1$ から (x_1, x_2) を消去して，

$$\mu = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2}(\sigma - \sigma_2) + \mu_2 \tag{5.3}$$

を得る．これは，２点 (μ_1, σ_1) と (μ_2, σ_2) を通る直線である．

2） $\rho(R_1, R_2) = -1$ 　の場合：

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = (x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2$$

より

$$\sigma = \pm(x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)$$

を得る．これと， $\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2$ および $x_1 + x_2 = 1$ から (x_1, x_2) を消去して，

$$\mu = \begin{cases} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(\sigma + \sigma_2) + \mu_2 \\ -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(\sigma - \sigma_2) + \mu_2 \end{cases} \tag{5.4}$$

を得る．この式で $\sigma = 0$ のとき，どちらの式の値も $\mu = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ となり一致する．したがって，(5.4)は２点 (μ_1, σ_1) と $(\frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, 0)$ を通る直線と，２点 $(\frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, 0)$ と (μ_2, σ_2) を通る直線とからなっていることが分かる．

- $AC - B^2 > 0$ の場合：($-1 < \rho(R_1, R_2) < 1$ 　の場合である．)

この場合，方程式(5.1)を次のように変形して見ると，双曲線の標準形になっている．

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{(\mu - \frac{B}{A})^2}{b^2} = 1, \tag{5.5}$$

ここで，

$$a = \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}},$$

$$b = \sqrt{\frac{AC - B^2}{A^2}} = \sqrt{\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}{(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)^2}}$$

である．これより，(μ, σ) の軌跡は双曲線であることが分かった．

5.1.2　多証券（３証券以上）の場合

３証券の場合を見てみる．

R_1, R_2, R_3 ：３証券の収益率

(x_1, x_2, x_3)，$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ：ポートフォリオ

$R_p = x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3$ ：ポートフォリオの収益率

次のように変形してみる．

$$R_p = x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 = (x_1 + x_2)\left(\frac{x_1R_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2R_2}{x_1 + x_2}\right) + x_3R_3$$

ここで

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} = y_1, \quad \frac{x_2}{x_1 + x_2} = y_2, \quad x_1 + x_2 = z_1, \quad x_3 = z_2$$

と置くと

$$R_p = z_1(y_1R_1 + y_2R_2) + z_2R_3$$

と表現できる．ここで

$$y_1 + y_2 = 1, \quad z_1 + z_2 = 1$$

に注意すると，$(y_1R_1 + y_2R_2)$ は R_1 と R_2 とのポートフォリオであり，これを新しい証券と看做せば，R_p は $(y_1R_1 + y_2R_2)$ と R_3 とのポートフォリオと看做せる．従って，３証券のポートフォリオは２証券のポートフォリオを２回繰り返して得られたものと同じになる．

以上から，３証券の場合のポートフォリオの構成は，２証券の場合のポートフォリオの構成の問題に帰着され，その場合の結果を使うことができる．多証券の場合のポートフォリオについても同様である．

こうして，多数の証券の存在する市場で構成されるポートフォリオの全体の様子についての考察ができる．

・フロンティアポートフォリオ

5.1.3　安全資産が存在する場合

● R_1と安全資産（安全利子率 r ）とのポートフォリオ

$$\begin{aligned}\mu &= E[x_1R_1+x_2r]=x_1\mu_1+x_2r\\ \sigma^2 &= V[x_1R_1+x_2r]=V[x_1R_1]=x_1^2\sigma_1^2\end{aligned}$$

(x_1,x_2) を消去して

$$\sigma^2=\left(\frac{\mu-r}{\mu_1-r}\right)^2\sigma_1^2$$

よって

$$\frac{\mu-r}{\sigma}=\frac{\mu_1-r}{\sigma_1}\quad(\mu=r+\frac{\mu_1-r}{\sigma_1}\sigma)$$

これより，(μ,σ) は直線上にあることが分かる．

● フロンティアポートフォリオ

● 市場ポートフォリオ（MP）と資本市場線（CML）

5.2　証券市場のモデル分析

5.2.1　資本資産評価モデル（CAPM）

● 資本市場線

● CAPM

・ R_M ：市場ポートフォリオの収益率

・ R_p ：ポートフォリオ p の収益率

このとき

$$\frac{E[R_p]-r}{\sqrt{V[R_p]}}=\rho(R_p,R_M)\frac{E[R_M]-r}{\sqrt{V[R_M]}}$$

または，これを書き換えて，

$$E[R_p]-r=\frac{Cov(R_p,R_M)}{V[R_M]}(E[R_M]-r)$$

が成立する．

［略証］

$$R(\alpha)=\alpha R_p+(1-\alpha)R_M$$

と置き，その期待値と分散を考える．

$$\mu(\alpha)=E[R(\alpha)]=\alpha E[R_p]+(1-\alpha)E[R_M]$$
$$\sigma^2(\alpha)=V[R(\alpha)]=\alpha^2V[R_p]+2\alpha(1-\alpha)Cov(R_p,R_M)+(1-\alpha)^2V[R_M]$$

このとき，次の計算結果が得られる．

$$\left[\frac{d\sigma(\alpha)}{d\mu(\alpha)}\right]_{\alpha=0}=\frac{Cov(R_p,R_M)-V[R_M]}{\sqrt{V[R_M]}(E[R_p]-E[R_M])}$$

この値は，R_p と R_M のポートフォリオの描く (μ, σ) 平面内でのカーブの市場ポートフォリオ点 (μ_M, σ_M) での接線の傾きである．市場ポートフォリオの最適性から，この傾きは資本市場線の傾きと一致するはずである．

従って

$$\frac{Cov(R_p, R_M) - V[R_M]}{\sqrt{V[R_M]}(E[R_p] - E[R_M])} = \frac{\sqrt{V[R_M]}}{E[R_M] - r}$$

が成立していなければならない．この式を整理して，示したい関係式が得られる．

- リスクプレミアムとリスク感応度（ベータ）

　上で得られた式より，

$$E[R_p] - r = \frac{Cov(R_p, R_M)}{V[R_M]}(E[R_M] - r) = \beta_p(E[R_M] - r)$$

が得られる．ここで，β_p は R_p のベータ値と呼ばれ

$$\beta_p = \frac{Cov(R_p, R_M)}{V[R_M]} = \rho(R_p, R_M)\frac{\sqrt{V[R_p]}}{\sqrt{V[R_M]}}$$

である．

　上式は，ポートフォリオの期待収益 $E[R_p] - r$ は市場ポートフォリオの期待収益 $(E[R_M] - r)$ に比例的に連動して動いていることを示している．その比例乗数である β_p は，$E[R_p] - r$ の $(E[R_M] - r)$ への連動の強さを示しており，R_p のリスク感応度（または，ベーター値）と呼ばれる．市場リスクへの感応度（sensitivity）の強さを表しているといえる．

　平面 (β, μ) 内の直線

$$\mu - r = \beta(E[R_M] - r), \quad (or, \quad \mu = r + (E[R_M] - r)\beta \quad)$$

は証券市場線（SML）と呼ばれる．

　注．上で得られた結果から，

$$R_p - r = \beta_p(R_M - r) + \epsilon_p, \quad E[\epsilon_p] = 0$$

なる表現ができることがわかる．

5.2.2 裁定評価理論APT（Arbitrage Pricing Theory）

　l 個の因子，$I_1, I_2, \ldots, I_l$

$$R_i = a_i + \sum_{j=1}^{l} b_{ij}I_j + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

　注．CAPMモデルは，APTモデルの $l = 1$ の場合になっている．

第６章　リスクと価値の評価法

不確実性の下での最適化

平均と分散だけで十分か？

6.1　平均・分散分析

前章で見たように，収益の良さを期待値で測り，リスクの大きさを分散で測る．

6.2　期待効用とリスク

6.2.1　効用関数

効用関数 $u(x)$ とは，ある財を x 単位消費したときに得られる効用が $u(x)$ であるとみなされる関数である．

効用関数の形：$u(0)=0$，一般に単調増加で上に凸．

よく使われる効用関数の例としては，

$$\text{指数型効用関数：}\ u(x)=1-e^{-\alpha x},\quad \alpha>0,$$

$$\text{対数型効用関数：}\ u(x)=\log(a+bx),\quad a,b>0,$$

$$\text{冪型効用関数：}\ u(x)=x^{\beta},\quad 0<\beta<1$$

がある．

注．効用関数 $u(x)$ の定義域は，消費のような場合には $\{x\geq 0\}$ でよいが，リスクのあるリターンを扱う場合には $\{-\infty<x<\infty\}$ で考えたい．

6.2.2　期待効用の最大化

期待効用：$E[u(X)]$ がリターン X の期待効用．

期待効用の最大化：$E[u(X)]>E[u(Y)]$ のとき，リターン X はリターン Y より価値が高いと評価される．

・$u(x)=x$ の場合：$E[u(X)]=E[X]$ であり，評価は期待値でなされる．

・２次関数の場合：$u(x)=-x(x-c)$

$$\begin{aligned} E[u(X)] &= cE[X]-E[X^2]=cE[X]-(V[X]+E[X]^2) \\ &= -E[X](E[X]-c)-V[X]=u(E[X])-V[X] \end{aligned}$$

$E[X]$ が大で $V[X]$ が小なとき，価値が高い．

$\rightarrow$ 平均・分散分析（５章を見よ）

● 期待効用の無差別曲線

・２次関数の場合： $\mu = E[X]$，　$\sigma = \sqrt{V[X]}$ と置くと，無差別曲線を定める方程式は

$$u(\mu) - \sigma^2 = constant \tag{6.1}$$

である．陰関数定理を適用できて陰関数が $\mu = \phi(\sigma)$ と定まったとすると，(6.1)を σ で微分して，

$$u'(\mu)\frac{d\mu}{d\sigma} - 2\sigma = 0 \tag{6.2}$$

を得る．これより

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma}{u'(\mu)} > 0 \tag{6.3}$$

が分かる．さらに(6.2) を σ で微分して，

$$u''(\mu)\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2 + u'(\mu)\frac{d^2\mu}{d\sigma^2} - 2 = 0 \tag{6.4}$$

$$\frac{d^2\mu}{d\sigma^2} = \frac{2 - u''(\mu)\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2}{u'(\mu)} > 0 \tag{6.5}$$

を得る．こうして，２次の効用関数の場合の無差別曲線 $\mu = \phi(\sigma)$ は単調増加で下に凸な関数になっていることが分かる．

6.2.3　リスクへの対応

● 危険回避度：

　１）絶対的危険回避度： $R_{abs} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$

　２）相対的危険回避度： $R_{rel} = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$

・ x が１単位増加したとき限界効用は何%減少するか？（R_{abs} %減少する.）

$$\frac{\frac{\triangle u'(x)}{u'(x)}}{\triangle x} = \frac{\frac{\triangle u'(x)}{\triangle x}}{u'(x)} \longrightarrow \frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{6.6}$$

・限界効用（$u'(x)$）の弾力性: x が１%増加したとき限界効用は何%減少するか？（R_{rel} %減少する.）

$$\frac{\frac{\triangle u'(x)}{u'(x)}}{\frac{\triangle x}{x}} = \frac{x}{u'(x)}\frac{\triangle u'(x)}{\triangle x} \longrightarrow x\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{6.7}$$

● Jensenの不等式：

$$u(x) \text{が上に凸な時,} \quad E[u(X)] \leq u(E[X])$$

$$u(x) \text{が下に凸な時,} \quad E[u(X)] \geq u(E[X])$$

　リスク回避的： $u(x)$ が上に凸の場合．　$E[u(X)] \leq u(E[X])$ となる．

　リスク中立的： $u(x) = x$ の場合で，　$E[u(X)] = E[X] = u(E[X])$ となる．

　リスク愛好的： $u(x)$ が下に凸の場合．　$E[u(X)] \geq u(E[X])$ となる．

・例：

1） $u(x) = x$ の場合，リスクへの意識無し（E[u(X)] = u(E[X]) である）.

2） $u(x) = -x(x-c)$ の場合，リスクは分散で測られている（u(E[X])-E[u(X)] =V[X] であり，これがリスクプレミアムである）.

● 株価変動とボラティリティー

6.3 リスクと価値の数量化

リスクの計量（数量化）

6.3.1 バリューアットリスク（VaR）: quantile method

Value at Risk（VaR）とは，危険度 α （例えば，α =0.05）を与えておき，分布の左側 α %の点の値のことである.

6.3.2 確実性等価

効用関数 $u(x)$ が与えられているとき，確率変数（ランダムなリターン）X に対して，次の等式より定まる $c = c(X)$ を X の確実性等価（certainty equivalent）と言う.

$$u(c(X)) = E[u(X)] \tag{6.8}$$

効用関数が単調増加で上に凸であれば，一般に $c(X) < E[X]$ である．その差 $E[X] - c(X)$ はリスク・プレミアムであるとみなされる.

6.3.3 効用無差別価格

次の関係式を満たす $p(X)$ を，X の効用無差別価格（utility indifferent price）という.

$$E[u(-p(X) + X)] = u(0) = 0 \tag{6.9}$$

6.3.4 リスク尺度（risk measure）

Definition 7（convex risk measure）確率変数の適当な空間上で定義された関数 $\rho(X)$ が次の性質を持っているとき，コンベックスリスク尺度（*convex risk measure*）と呼ばれる.

a）(*Monotonicity*)： $X \leq Y \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \geq \rho(Y)$.

b）(*Cash invariance*)： $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.

c）(*Normalization*)： $\rho(0) = 0$.

d）(*Convexity*)： $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

関数 $\rho(X)$ が，上の *a*），*b*），*c*），*d*）に加え，次の性質 *e*）

e）(*Positive Homogeneity*)： $\forall\lambda \in R^+, \quad \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$,

を持っているとき，コヒーレント（*coherent*）と呼ばれる．

注．効用無差別価格 $p(X)$ に対して，$\rho(X)=-p(X)$ により定まる $\rho(X)$ はconvex risk measureになる．（ただし，一般にはcoherentにはならない．）

Definition 8（monetary utility function）関数 $\phi(X)$ が次の性質を持っているとき，*a monetary utility function*と呼ばれる．

a）（*Monotonicity*）: *If* $X\geq Y$, *then* $\phi(X)\geq\phi(Y)$.

b）（*Monetary property*）: $\phi(X+m)=\phi(X)+m$,

c）（*Normalization*）: $\phi(0)=0$ 　*(Remark: b) + c)* $\rightarrow\phi(m)=m$*)*

d）（*Concavity*）: $\phi(\lambda X+(1-\lambda)Y)\geq\lambda\phi(X)+(1-\lambda)\phi(Y)$ *for* $0\leq\lambda\leq 1$.

Proposition 1 効用無差別価格 $p(X)$ は*monetary utility function*である．

注．homogeneityは，一般には成立しない．保険の場合とは異なり，評価の場合にはこの性質は必要ない

（証明）

a)．Assume that $X\geq Y$. The utility indifferent price of X, $p(X)$, is the solution of

$$E[u(-p(X)+X)]=u(0)=0.$$

From $X\geq Y$, we obtain

$$E[u(-p(X)+Y)]\leq E[u(-p(X)+X)]=u(0)=0.$$

Therefore $-p(X)\leq -p(Y)$, and we have obtained $p(X)\geq p(Y)$.

b)．

$$E[u(-(p(X)+m)+(X+m))]=E[u(-p(X)+X)]=0$$

So

$$p(X+m)=p(X)+m.$$

c) This fact follows from $u(0)=0$.

d)（Concavity）:

$$\begin{aligned}
& E[u(-(\lambda p(X)+(1-\lambda)p(Y))+(\lambda X+(1-\lambda)Y))] \\
= \ & E[u((\lambda(-p(X)+X)+(1-\lambda)(-p(Y)+Y))] \\
\geq \ & E[\lambda u(-p(X)+X)+(1-\lambda)u(-p(Y)+Y))] \\
= \ & \lambda E[u(-p(X)+X)]+(1-\lambda)E[u(-p(Y)+Y))] \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

So

$$-(\lambda p(X)+(1-\lambda)p(Y)\geq -p(\lambda X+(1-\lambda)Y)$$

and

$$\lambda p(X) + (1-\lambda)p(Y) \leq p(\lambda X + (1-\lambda)Y)$$

（証明終わり）

- しかし，一般にはcoherentでは無い．

（証明）指数型効用関数の場合に $E[u(\lambda(-p(X)+X))] = 0$ が成立しない例が作れる．

・Example：指数型効用関数の場合，

$$p(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}]$$

である．これがcoherentとなるためには

$$E[e^{-\lambda\alpha X}] = E[e^{-\alpha X}]^{\lambda}, \quad \forall\lambda > 0.$$

が必要十分条件であるが，特別な場合を除いて，これは成立しない．

（証明終わり）

第７章　株価過程のモデル化

7.1　確率過程としてのモデル化

確率空間：$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

フィルトレイション(filtration)：$\{F_t, t = 0.1, 2, \ldots. \quad or \quad t \geq 0\}$，情報の空間

$S_t(\omega) = S(t,\omega)$: F_t–adaptive

7.1.1　モデル分析の目的

１）株価の経済的な意味を分析する．

２）株価の予測を考えたい．

３）最適な投資戦略を検討したい．

４）金融工学への応用：デリバティブの価格理論．

7.1.2　株価モデルの類型

１）離散時間モデルと連続時間モデル

２）計量モデルと確率モデル

7.2　計量モデル

時系列

$S_t(\omega) = S(t,\omega)$: F_t–adaptive, $\quad t = 0, 1, 2, \ldots, T$

定常時系列モデル（stationary）

自己回帰モデルAR（Auto Regression）

ARMA（Auto Regression Moving Average），ARMA（k, l）

ARCH（Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity Model）

GARCH（Generarized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity Model）

7.3　確率モデル

7.3.1　離散時間の確率モデル

２項モデル，多項モデル

マルコフ連鎖

7.3.2　連続時間の確率モデル

$S_t(\omega) = S(t, \omega)$: F_t–adaptive,　$0 \leq t \leq T$.

１）連続経路モデル

　ブラウン運動，拡散過程

２）ジャンプ経路モデル

　Poisson過程，複合Poisson過程

３）より一般的な確率モデル

　jump diffusion

　マルコフ過程

　レヴィ過程

　確率微分方程式

　semimartingale process

第８章　最適投資・消費理論

8.1　１期間モデル

v_0 ：初期資産（＝使用可能資金）

$\{C_t, t = 0, 1\}$ ：消費過程

$\{(S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(d)}), t = 0, 1\}$ ：資産の価格，$S^{(0)}$は安全資産とする．

$(\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \ldots, \phi^{(d)})$ ：投資戦略

$V_0^{\phi} = \sum_0^d \phi^{(j)} S_0^{(j)}$ ：$t = 0$での投資額

$C_0 + V_0^{\phi} = v_0$ の条件の下で投資する

$V_1^{\phi} = \sum_0^d \phi^{(j)} S_1^{(j)}$：$t=1$ での使用可能資金額

$C_1 = V_1^{\phi}$

$u(x)$：効用関数

$u(C_0) + E[u(C_1)]$：期待効用

• 最適投資・消費戦略：

制約条件 $C_0 + V_0^{\phi} = v_0$ の下で期待効用 $u(C_0) + E[u(C_1)]$ を最大化するように $(C_0, \phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots,$ $\phi^{(d)})$ を選ぶ.

• 例.（２次の効用関数の場合）

$T = 1,\ d = 1,\ u(x) = -x(x-c)\ (c > 0)$ とし， $S_1^{(1)} \sim N(S_0^{(1)}, \sigma_1^2)$ とする.

制約条件： $C_0 + \phi^{(0)} S_0^{(0)} + \phi^{(1)} S_0^{(1)} = v_0,$

最終消費量： $C_1 = V_1^{\phi} = \phi^{(0)} S_1^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)}$

期待効用： $u(C_0) + E[u(C_1)]$

$= -C_0(C_0 - c) + E[-(\phi^{(0)} S_1^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)})(\phi^{(0)} S_1^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)} - c)]$

$= -C_0(C_0 - c) - (\phi^{(0)})^2 (S_1^{(0)})^2 - 2\phi^{(0)}\phi^{(1)} S_1^{(0)} S_1^{(1)} - (\phi^{(1)})^2(\sigma_1^2 + (S_0^{(1)})^2) + c(\phi^{(0)} S_1^{(0)} + \phi^{(1)} S_0^{(1)})$

$= f(C_0, \phi^{(0)}, \phi^{(1)})$

従って，$g(C_0, \phi^{(0)}, \phi^{(1)}) = C_0 + \phi^{(0)} S_0^{(0)} + \phi^{(1)} S_0^{(1)} - v_0$ とおいて，制約条件 $g(C_0, \phi^{(0)}, \phi^{(1)}) = 0$（１次式）の下で $f(C_0, \phi^{(0)}, \phi^{(1)})$（２次式）を最大化する問題になる.（２次計画法）

8.2 多期間モデル

v_0：初期資産（＝使用可能資金）

$\{C_t, t = 0, 1, \dots, T\}$：消費過程

$\{(S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(d)}), t = 0, 1, \dots, T\}$：資産の価格,

$\Phi = \{\phi_t\}, \quad \phi_t = (\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)}, \dots, \phi_t^{(d)}), t = 1, 2, \dots, T$：投資戦略

$V_0^{\Phi} = \sum_0^d \phi_1^{(j)} S_0^{(j)}$：$t = 0$（第１期首）での投資額

最初（$t = 0$（第１期首)）の投資戦略 $(\phi_1 = (\phi_1^{(0)}, \phi_1^{(1)}, \dots, \phi_1^{(d)})$ は条件

$$C_0 + V_0^{\Phi} = v_0$$

の下で投資する.

第１期末での資産の価値は $V_1^{\Phi} = \sum_0^d \phi_1^{(j)} S_1^{(j)}$ である．この額が，第２期首（＝第１期末）での使用可能資金額

第２期首（＝第１期末）に条件 $C_1 + \sum_0^d \phi_2^{(j)} S_1^{(j)} = V_1^{\Phi}$ の下で消費・投資戦略 (C_1, ϕ_2) を立てる.

これを各期に繰り返す．すなわち， t 期首（$= t-1$ 期末）には $V_{t-1}^{\Phi} = \sum_0^d \phi_{t-1}^{(j)} S_{t-1}^{j}$ の使用可

能資産があるので，これを消費 (C_{t-1}) と投資 (ϕ_t) に条件 $C_{t-1}+\sum_0^d \phi_t^{(j)} S_{t-1}^{(j)} = V_{t-1}^{\Phi}$ の下で振り分ける．

これをＴ期首（＝T-1期末）まで繰り返し，消費列 $C_0, C_1, \ldots, C_{T-1}$ を得る．第Ｔ期末には V_T^{Φ} $= \sum_0^d \phi_T^{(j)} S_T^{(j)}$ が残るが，これはすべて消費に回されるものとして，$C_T = V_T^{\Phi} = \sum_0^d \phi_T^{(j)} S_T^{(j)}$，とする．

第ｔ期の効用関数を $u(t,x)$ として，総期待効用

$$E[\sum_0^T u(t,C_t)] = u(0,(C_0) + E[u(1,(C_1)] + \cdots + E[u(T,C_T)]$$

を最大化する戦略が，最適消費・投資戦略である．

この問題は，確率的制御理論の手法を使って議論される．（Belllman principleなど．）

第９章　リスクヘッジとデリバティブ

9.1　原資産過程と資産の現在価値

・確率空間：$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

・$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$

・フィルトレイション（filtration）：$\{F_t, t=0,1,\ldots,T\}$．情報の空間．

・$S_t^{(j)}(\omega)$: F_t–adaptive,　$j=0,1,\ldots,d,\quad t=0,1,\ldots,T$

・$\{S_t^{(0)}(\omega), S_t^{(1)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)), t=0,1,\ldots,T\}$：資産の価格，

・$(S_0^{(0)}, S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(d)})$：初期値（現時点の価格）は既知

・安全資産の価格はノンランダムとする：$S_t^{(0)}(\omega) = S_0^{(0)} e^{rt}, t=0,1,\ldots,T$

・利子率 r ：連続複利 (e^{-rt}) を採用する．ノンランダムで時間的にも一定と仮定する．（例を見るとき，$r=0$ と仮定しておく．）

・割引率と現在価値： $S_t e^{-rt}$

9.2　原資産過程と金融派生商品（デリバティブ）

- 原資産：従来からある金融商品（証券，金利，など）
- デリバティブ（金融派生商品）：原資産に対して，それらから派生して取り引きされる商品．金融派生商品を新たに原資産として作られる金融派生商品もある．

  ・先物，スワップ，オプション，の３つが主要なデリバティブである．
- 先渡し：所定の資産を，所定の将来時点（受渡し時点，満期）に，所定の価格（受渡し価格）で，売買する契約．

- 先物：先渡しにおいて，特に取引所（先物取引所）において集中取引されており，取引が標準化され反対売買により決済ができるもの．
- スワップ：債務の交換．（金利スワップ，通貨スワップ）

　・例：金利スワップ

会社	調達可能な長期金利	調達可能な短期金利	希望金利
A	10%	８％	短期資金を希望
B	12%	７％（または９％）	長期資金を希望

この場合，A社は長期金利で調達し，B社は短期金利で調達し，相互の金利支払いの債務を交換する（スワップ契約を結ぶ）ことで，両者とも有利な結果を得られる．

・A社は，自前で短期資金を調達しようとすれば金利８％になるところを，金利スワップを利用することにより実質７％で調達できたことになる．

・B社は，自前で長期資金を調達しようとすれば金利12%になるところを，金利スワップを利用することにより実質10%で調達できたことになる．

（注．カッコ内の場合にも，両社共に有利になる契約が可能．）

- オプション：原資産の価格過程 S_t に依存した権利である．

　・例：ヨーロッパ型コールオプション：

ある特定の株式１単位を，　（原資産）

将来のある特定の時点 T において，　（満期日）

あらかじめ定められた価格 K（円）で，　（権利行使価格）

買う権利．　（コールオプション）

$$X = \max\{S_T - K, 0\}$$

・オプションの買い手は権利を持ち，売り手は義務を負うことになる．

・権利は，行使するか放棄するかのどちらかを選択できる．

・コールオプションとプットオプション

・ヨーロッパ型オプションとアメリカ型オプション

ヨーロッパ型コールオプション，ヨーロッパ型プットオプション

アメリカ型コールオプション，アメリカ型プットオプション

・経路に依存するオプション

asian option

- 金融オプションとリアル・オプション
- 金融派生商品（デリバティブ）の役割：リスク・ヘッジ（リスク管理への応用）

9.3　原資産過程と市場のモデル

- 原資産の価格過程 S_t は不確実性を伴っている
  - ・ S_t は確率過程として定式化される
- 原資産過程のモデル
  - ・離散時間モデル：二項過程，多項過程，計量モデル（回帰モデル）
  - ・連続時間モデル：ブラックショールズモデル（幾何ブラウン運動），ジャンプ過程，
    レヴィ過程
- 効率的な市場の存在

  効率的市場，非効率的な市場，市場無し，売買されないもの
- 一物一価の法則が成立しているか？
  - ・無裁定（裁定の非存在：no arbitrage）
  - ・無裁定概念：「元手が 0 または負で，最終的には非負の収益を得，さらに，正の収益を得る確率が正であるような投資戦略（ポートフォリオ）は存在しない」という仮定.

9.4　デリバティブを利用したリスクのヘッジ

- 先物の利用
- スワップの利用
- オプションの利用

第10章　オプションの価格理論

- オプションの価格（＝価値）はどのような原理で定まるのか？

  → 数理ファイナンスの基本課題
- オプションの価格はどのようにして計算されるか？

  → 金融工学の主要な課題

10.1　効率的な市場におけるオプション価格の算定原理

- オプションは，原資産の価格過程 S_t に依存した確率変数 X（権利から得られる収益）として表現される.
- オプション X の現時点での価値（＝価格）$\pi(X)$ はいくらか？
  - ・期待収益（平均値）で評価してよいか？
  - ・単なる平均値 $E_P[X]$ では不適切（経験的に得られている）
- 例による説明

・原資産過程が２項過程モデルとする

$$S_1 = \begin{cases} uS_0, \\ dS_0, \end{cases} \qquad (0 < d < 1 < u)$$

・オプションXは，次のように与えられているものとする．

$$X = \begin{cases} x_1 \quad if \quad S_1 = uS_0, \\ x_2 \quad if \quad S_1 = dS_0, \end{cases}$$

オプションXと同等の結果をもたらすポートフォリオを組むことを考える．安全資産（＝債券）に a_0，危険資産（＝株券）に a_1 投資したとする．必要な元手は $a = a_0 + a_1$ である．一期後にはこの額は次のようになる．

$$a = a_0 + a_1 \to \begin{cases} a_0 + ua_1 \quad if \quad S_1 = uS_0, \\ a_0 + da_1 \quad if \quad S_1 = dS_0, \end{cases}$$

この結果がXと等しいとすると次の連立方程式が得られる．

$$\begin{cases} a_0 + ua_1 = x_1 \quad (S_1 = uS_0\text{の場合}) \\ a_0 + da_1 = x_2 \quad (S_1 = dS_0\text{の場合}), \end{cases}$$

この連立方程式を解いて，次の結果を得る．

$$a_0 = \frac{ux_2 - dx_1}{u - d}, \quad a_1 = \frac{x_1 - x_2}{u - d}$$

従って

$$a = a_0 + a_1 = \frac{ux_2 - dx_1}{u - d} + \frac{x_1 - x_2}{u - d} = \frac{1 - d}{u - d}x_1 + \frac{u - 1}{u - d}x_2$$

得る．

ところで，市場において一物一価の法則が成立しているとすると，上で組んだポートフォリオとオプションXとは同じ結果を持つので，両者の価値は一致するはずである．（このポートフォリオはXの複製ポートフォリオと呼ばれる．）ポートフォリオの現在価値はそれを組むのにかかる元手に等しいと考えられるので a である．従って，オプションXの現在価値 X_0（＝オプションXの価格 $\pi(X)$）は次式で与えられることになる．

$$\pi(X) = X_0 = a = \frac{1 - d}{u - d}x_1 + \frac{u - 1}{u - d}x_2$$

● ここで，上で得られたオプション価格の公式の意味を検討してみよう．
いま

$$q_1 = \frac{1 - d}{u - d}, \quad q_2 = \frac{u - 1}{u - d}$$

と置くと

$$q_1 + q_2 = 1, \quad q_1 > 0, \ q_2 > 0$$

となっている．すなわち (q_1, q_2) は確率になっており，この確率をQで示すことにすると，

$$\pi(X) = X_0 = E_Q[X]$$

となっている．これは，オプションの現在価値は新しく導入された確率Qによる期待値（＝平均）として求まることを示している．このQは，物理的な確率Pとは一般に異なる．

この確率Qは何か？　計算により次の関係式が分かる．

$$E_Q[S_1] = uS_0q_1 + dS_0q_2 = S_0\left(u\frac{1-d}{u-d} + d\frac{u-1}{u-d}\right) = S_0$$

この等式は，確率Qで見るとき，株価S_tの動きはリスク中立的であることを示している．これが確率Qの特徴付けであり，Qはリスク中立測度と呼ばれる．

● 効率的市場が存在している場合，無裁定理論による価格付けが基本

・複製ポートフォリオ（ヘッジングポートフォリオ）

・一物一価の法則より定まる価格：複製ポートフォリオの元手

・リスク中立測度Qによる平均$E_Q[X]$

● この状況は，多期間モデルの場合でも成立している．

● 上で使っている考え方（論理）

１）オプションXを実現するポートフォリオ（複製ポートフォリオ）が存在する．

２）一物一価の法則が成立している（無裁定条件の成立）．

・このような状況はどの程度一般的に成立しているか？

・現実を説明出来ているか？

・理論的な議論と実証分析とが必要．

10.2　無裁定条件とリスク中立測度

前節で見たように，オプション価格が妥当な形で定まるか否かは，市場の性質と連動している．まずは市場の効率性が問題になる．

● 裁定機会

・「損をする可能性無しに，正の確率で得をする可能性があること」

・裁定機会の存在する例：

一物二価の場合，

確実な値上がり（または値下がり）が分かっている場合

・効率的な市場においては裁定機会は存在しない

（効率的な市場の定義）

裁定機会の存在，非存在

例１（arbitrage）　$S_t^{(0)} \equiv 1$ とする．$d = 1, N = 2, T = 1$

$$S_0^{(1)} = 10, \quad S_1^{(1)} = \begin{cases} S_1^{(1)}(\omega_1) = 12, \\ S_1^{(1)}(\omega_2) = 11, \end{cases}$$

例２（no-arbitrage）

$$S_0^{(1)} = 10, \quad S_1^{(1)} = \begin{cases} S_1^{(1)}(\omega_1) = 12, \\ S_1^{(1)}(\omega_2) = 9, \end{cases}$$

- **数理ファイナンスの第１基本定理**（無裁定条件（裁定の機会の非存在））

Theorem 1（**数理ファイナンスの第１基本定理**）裁定機会が存在しないための必要十分条件は，リスク中立測度（＝同値マルチンゲール測度）が存在することである．

例１　リスク中立測度は存在しない．

例２　リスク中立測度は存在する．

- 金融オプションの標準的な理論は，無裁定条件の下で展開される．

10.3　完備市場と非完備市場

- 複製ポートフォリオは常に存在するとは限らない．
- 完備市場と非完備市場：任意のオプションに対して，それと同等な結果を導くポートフォリオ（複製ポートフォリオ）が存在する市場を完備市場と呼ぶ．そうでないとき，非完備市場と呼ぶ.
- ２項過程と３項過程の違い.

Definition 9（**完備市場の定義**）任意のオプションに対して複製ポートフォリオが存在する市場を完備市場という．

例１　$S_t^{(0)} \equiv 1$ とする．$d = 1, N = 2, T = 1$

$$S_0^{(1)} = 10, \quad S_1^{(1)} = \begin{cases} S_1^{(1)}(\omega_1) = 12, \\ S_1^{(1)}(\omega_2) = 11 \ (or \ 10). \end{cases}$$

完備市場である．（注．ただし，裁定機会は存在している．従って，効率的な市場では無い．）

例２

$$S_0^{(1)} = 10, \quad S_1^{(1)} = \begin{cases} S_1^{(1)}(\omega_1) = 12, \\ S_1^{(1)}(\omega_2) = 9. \end{cases}$$

完備市場である．裁定機会は存在しない．

例３

$$S_0^{(1)} = 10, \quad S_1^{(1)} = \begin{cases} S_1^{(1)}(\omega_1) = 12, \\ S_1^{(1)}(\omega_2) = 10, \\ S_1^{(1)}(\omega_3) = 9. \end{cases}$$

非完備市場である.（オプションにより，複製ポートフォリオが存在するものと存在しないものとがある.）

● **数理ファイナンスの第２基本定理**（完備性の判定）

Theorem 2（**数理ファイナンスの第２基本定理**）無裁定条件の下で，市場が完備であるための必要十分条件は，リスク中立確率測度が唯一つ存在することである.（リスク中立確率測度が複数存在するとき，非完備市場である.）

例１　リスク中立測度は存在しないが，完備である．無裁定条件が成立していないので，上の定理は適用できない.

例２　リスク中立測度が唯一つ存在するので，完備である.

例３　リスク中立測度が複数存在するので，非完備である.

10.4　完備市場におけるオプション価格

・無裁定条件を仮定する.

10.4.1　オプション価格の公式

● ２項過程モデルでの説明のように，完備市場でのオプションの価格は複製ポートフォリオの元手と等しいものと定義される.

● 無裁定で完備な市場では,

$$\text{オプション}X\text{の価格} = E_Q[X]$$

が成立する.（ここで，Qはリスク中立測度である.）

・１期間モデルでの証明（説明）

完備市場の仮定より複製ポートフォリオが存在しているので，それを (a_0, a_1) とする．複製ポートフォリオであるから，$X = a_0 + a_1 S_1^{(1)}$が成立している．これと，Qがリスク中立測度であることより,

$$E_Q[X] = E_Q[a_0 + a_1 S_1^{(1)}] = a_0 + a_1 E_Q[S_1^{(1)}] = a_0 + a_1 S_0^{(1)}$$

となり，証明された.

注１．複製ポートフォリオが複数あった場合，その元手はどの複製ポートフォリオについても等しい.（どれも，$E_Q[X]$ に等しい.）

注２．リスク中立測度が複数ある場合，複製ポートフォリオのあるオプションの場合には，どのリスク中立測度で計った期待値も等しい.（複製ポートフォリオの元手 $a_0 + a_1 S_1^{(1)}$ に等しい.）

・より一般的な状況での証明(説明) のためには，次のような概念が必要.

情報の空間，確率過程，マルチンゲール，確率積分，自己充足的なポートフォリオ戦略

例１（完備だが裁定機会がある）

リスク中立測度は存在しないので，オプションXの価格を＝$E_Q[X]$の形で与えることはできない.

複製ポートフォリオは一意的に存在するので，オプションの価格を複製ポートフォリオの元手と等しいものとすれば，その値は定まる．しかし，その値はオプションの価格としては不自然なものになる.

例２（無裁定で完備）

オプションXの価格＝$E_Q[X]$という形で，一意的に定まっている.

10.4.2　ブラックショールズモデル

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t]$$

幾何Brown運動と呼ばれている.

- 完備市場モデルである
- ヨーロッパ型コールオプションの価格公式

標準正規分布の分布関数$\Phi(x)$を使って次のように表せる.

$$E_Q[e^{-rT}C_K] = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2).$$

ここで$\Phi(x)$は標準正規分布の分布関数であり，

$$d_1 = \frac{\log\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log\frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{10.1}$$

である．この公式がBlack-Sholesの公式と呼ばれているものである.

10.5　非完備市場におけるオプション価格

・無裁定条件を仮定する．Theoren 2より，リスク中立測度（マルチンゲール測度）が複数存在する.

・非完備の定義より，複製ポートフォリオが存在しないようなオプションが存在する.

- **数理ファイナンスの第３基本定理**（非完備市場でのオプション価格）

Theorem 3（数理ファイナンスの第３基本定理）非完備市場において，無裁定条件の下で，あるオプションについて，下からの近似複製ポートフォリオの元手の上限と上からの近似複製ポート

フォリオの元手の下限とから定まる区間は，リスク中立測度による期待値全体の集合は一致する.

・非完備市場モデルの例

・連続過程とジャンプ過程

10.6　金利モデル

短期金利と長期金利

金利の期間構造

10.7　オプション理論に関するその他の項目

・リアル・オプション：non-tradable assetsを原資産とした場合のオプション価格理論.

・期待効用理論

・効用無差別価格

・リスク尺度

二項過程モデルによる説明と計算例

・ブラックショールズモデルに対する近似計算にもなっている.

10.8　ストック・オプションについて

● 参考 :「ストック・オプション」の定義

（会計基準，用語の定義）

２．本会計基準における用語の定義は次のとおりとする.

（１）「自社株式オプション」とは，自社の株式（財務諸表を報告する企業の株式）を原資産とするコール・オプション（一定の金額の支払いにより，原資産である自社の株式を取得する権利）をいう.

（２）「ストック・オプション」とは，自社株式オプションのうち，特に企業がその従業員等に，報酬として付与するものをいう．ストック・オプションには，権利行使により対象となる株式を取得することができるというストック・オプション本来の権利を獲得することにつき条件が付されているものが多い.

10.8.1　オプションとしての類型

・アメリカン・コールオプションの範疇に入るとみなせる.

・ただし，通常のアメリカン・オプションとの相違点がいくつかある．（会計基準，用語の定義で，「ストック・オプション本来の権利を獲得することにつき条件が付されているものが多い」と述べられている.）

10.8.2　利用可能なモデル

・２項過程モデル，またはブラックショールズモデル，を基に修正を加えたものが考えられる．

10.9　数理ファイナンスの基本定理の証明について

10.9.1　第１基本定理の証明

Theorem 4（数理ファイナンスの第１基本定理） 裁定機会が存在しないための必要十分条件は，同値なリスク中立測度（＝同値マルチンゲール測度）が存在することである．

（証明）１期間モデルで行う．

($\Leftarrow$)

リスク中立測度Qが存在したとする．すなわち

$$E_Q[S_1^{(j)}] = S_0^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{10.2}$$

が成立しているものとする．このとき裁定機会が存在したと仮定して，次のような投資戦略が存在したとする．

$$V_0^{\phi} = \sum_0^d \phi^{(j)} S_0^{(j)} \leq 0 \tag{10.3}$$

$$V_1^{\phi} = \sum_0^d \phi^{(j)} S_1^{(j)} \geq 0 \tag{10.4}$$

$$E[V_1^{\phi}] = E\left[\sum_0^d \phi^{(j)} S_1^{(j)}\right] > 0. \tag{10.5}$$

（10.2）と（10.3）より

$$E_Q[V_1^{\phi}] = \sum_0^d \phi^{(j)} E_Q[S_1^{(j)}] = \sum_0^d \phi^{(j)} S_0^{(j)} \leq 0. \tag{10.6}$$

一方，QはPと同値であるので，（10.5）より

$$E_Q[V_1^{\phi}] > 0 \tag{10.7}$$

である．これは，（10.6）と矛盾している．

($\Rightarrow$)

最も簡単な場合（ $d = 1, N = 2$ の場合）について，裁定機会が存在しない場合には同値なリスク中立測度Qを構成できることを示す．

Qが構成できたとして，$Q(\omega_1) = q_1$，$Q(\omega_2) = q_2$ と置くと，(q_1, q_2) は次の条件を満たす．

$$q_1, q_2 > 0, \tag{10.8}$$

$$q_1 + q_2 = 1, \tag{10.9}$$

$$S_1(\omega_1)q_1 + S_1(\omega_2)q_2 = S_0. \tag{10.10}$$

逆に，このような条件をを満たす (q_1, q_2) が存在したときには，$Q(\omega_1) = q_1$，$Q(\omega_2) = q_2$ により定まるQが求めるものである．以下，(10.8)，(10.9)，(10.10) を満たす (q_1, q_2) を構成する．

$\mathbf{X}_0 = \{X = V_1^\Phi; \Phi$は $V_0^\Phi = 0$ なる戦略$\}$ と置く．$\mathbf{X}_0$ は線形空間になる．任意の $X \in \mathbf{X}_0$ に対して，$(X(\omega_1), X(\omega_2))$ は第１象限内に無い．なぜなら，もし第１象限内にあったとすると，$X = V_1^\Phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)} \geq 0$ で，$X(\omega_i) = V_1^\Phi(\omega_i) = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)}(\omega_i), i = 1, 2$ の内の少なくとも一方は正である．従って$E[V_1^\Phi] > 0$ となり，無裁定の過程に反することになる．従って，$\mathbf{X}_0$ は原点を通り第２象限と第４象限を通る線形空間（直線）になっていることが分かる．

これより，$\mathbf{X}_0$ に直交するベクトル (q_1, q_2) を条件（10.8）と（10.9）を満たすように取れる．そして，直交条件より $\phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_0^{(1)} = 0$ なる任意の $(\phi^{(0)}, \phi^{(1)})$ に対して

$$\left(\phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)}(\omega_1)\right) q_1 + \left(\phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)}(\omega_2)\right) q_2 = 0 \tag{10.11}$$

が成立している．いま確率Qを$Q(\{\omega_1\} = q_1$，$Q(\{\omega_2\} = q_2$に定めると，上式は

$$E_Q[\phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_1^{(1)}] = 0 \tag{10.12}$$

となる．$\phi^{(1)} \neq 0$ に取って，この式と $\phi^{(0)} + \phi^{(1)} S_0^{(1)} = 0$ より $E_Q[S_1^{(1)}] = S_0^{(1)}$ となり，Qがリスク中立測度であることが言えた．

（証明終わり）

10.9.2 第２基本定理の証明

Theorem 5（数理ファイナンスの第２基本定理） 無裁定条件の下で，市場が完備であるための必要十分条件は，リスク中立確率測度が唯一つ存在することである．（リスク中立確率測度が複数存在するとき，非完備市場である．）

第２基本定理の証明の前に，完備性の成立するための必要十分条件を見ておこう．それにより，定理の証明は，線形代数の解の存在と一意性の問題に帰着される．

行列Aを次式のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & S_1^{(1)}(\omega_1) & S_1^{(2)}(\omega_1) & \cdots & S_1^{(d)}(\omega_1) \\ 1 & S_1^{(1)}(\omega_2) & S_1^{(2)}(\omega_2) & \cdots & S_1^{(d)}(\omega_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & S_1^{(1)}(\omega_N) & S_1^{(2)}(\omega_N) & \cdots & S_1^{(d)}(\omega_N) \end{pmatrix}$$

このとき，次のLemmaが成立する．

Lemma 1　$Complete \Longleftrightarrow rank(A)=N$

（証明）

Complete $\Longleftrightarrow A\phi = X$ が任意の X に対して解を持つ

$\Longleftrightarrow rank(A)=N$

（証明終わり）

（第２基本定理の証明）

$(\Rightarrow)$

無裁定を仮定しているので，第１基本定理より同値なリスク中立測度 Q の存在は言えている．したがって，一意性を示せばよい．いま，$q_i = Q(\{\omega_i\}),\, i=1,\ldots,N$ と置くと，Q がリスク中立なことより，$(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ は方程式

$$(q_1,q_2,\ldots,q_N)A = (1,S_0^{(1)},\ldots,S_0^{(d)}) \tag{10.13}$$

を満たしている．完備性の仮定から，Lemma 1より $rank(A)=N$ となっているので，この方程式の解は一意的である．

$(\Leftarrow)$

同値なリスク中立測度が唯一つだとする．このとき完備でなかったと仮定してみる．Lemma 1 より $rank(A)<N$ となっている．

同値なリスク中立測度の存在を仮定しているので，方程式（10.13）は解を持っている．それを $(q_1^0,q_2^0,\ldots,q_N^0)$ とする．$rank(A)<N$ より方程式（10.13）は複数の解を持ち，それらの解は $(q_1^0+l_1,q_2^0+l_2,\ldots,q_N^0+l_N)$，$(l_1,l_2,\ldots,l_N)$ は $(l_1,l_2,\ldots,l_N)A=0$ の解，となっている．

この $(l_1,l_2,\ldots,l_N)$ の全体は線形空間をなしているので，十分 0 に近いものを取ることができ，その場合 $\sum_i l_i = 1$ に注意して，$(q_1^0+l_1,q_2^0+l_2,\ldots,q_N^0+l_N)$ は確率となっていることがわかり，同値なリスク中立測度が複数存在することになる．これは，同値なリスク中立測度が唯一つだとする仮定と矛盾する．以上から，完備であることが言えた．

（証明終わり）

第11章　リアル・オプション

11.1　オプション理論の拡張

次の２つの意味での拡張が図られている．

- 原資産過程の拡張：

　１）原資産を金融資産から実物資産（real assets）に拡張して考える．

　　例　不動産オプション（不動産金融工学）

２）それ自身が売買されないもの．

例　天候デリバティブ

- 市場の条件の緩和：

１）無裁定条件が成立していない場合．すなわち，市場が存在しない（相対取引のみ）か，存在しても非効率的である．（このとき，リスク中立測度は存在しない）

２）非完備性が強い場合．

注．完備性の概念と無裁定条件の概念とは別の概念であり，区別して考えるべきものである．

・完備であっても無裁定条件が成立していない場合には，複製ポートフォリオは複数存在す可能性があり，それらの複製ポートフォリオの元手は異なる可能性がある．（無裁定条件が成立していれば，一意的に定まる．）

・非完備であっても無裁定条件が成立している場合には，リスク中立測度が存在しており，リスク中立測度の下での議論が可能．

・非完備であり無裁定条件も成立していない場合には，新しい理論が必要になる．

11.2　新しい理論の必要性

金融オプションの標準的な理論は，「効率的な市場の存在」を前提にし，「無裁定条件の成立」の仮定の下でなされている．

例

・「無裁定」かつ「完備」：二項過程モデル（upとdownのある場合），Black-Scholesモデル．

・「無裁定」で「非完備」：３項過程モデル，ジャンプ過程モデル，レヴィ過程モデル．このような金融オプションの場合の価格理論は，「裁定理論」と呼ばれている理論（リスク中立測度，マルチンゲール測度，による価格付け）により構成されている．

しかしながら，上で見たような拡張を試みた場合には，金融オプションでの標準的な理論は適用できない．すなわち，「原資産の市場の存在」，「その市場が効率的であること」，の前提が成立していない場合のオプションの価値を考えねばならない．

不確実性を伴った債権の価値の評価は，リスク評価の理論と表裏一体のものである．

期待効用理論とリスク尺度の理論が有効性を持ちうる．

11.3　リアルオプション・アプローチ

「リアルオプション」の本来の意味は，金融資産を原資産とするオプションを「金融オプション」と呼ぶのに対応させて，実物資産を原資産とするオプションを意味している．しかし，より

一般に，金融資産以外のものを原資産にすると看做すことのできるようなオプションを意味するようになっている．

さらに，必ずしも原資産が何であるかが明確でない場合にも，オプションと看做せるものに対してそのオプションの価値を評価しようとする理論方法を，リアルオプションアプローチと呼んでいる．特に，天候デリバティブのように，それ自身が売買されないものを原資産と看做す場合や，プロジェクトの推進などでの企業戦略をオプションと看做して議論する場合が注目されている．また，不良債権の証券化によるリスク移転の場合も重要である．

リアルオプション・アプローチの場合に注意すべきことは，金融オプションの分野でなされてきた既成の議論が適用可能な前提条件が満たされているかの検証である．

第12章　プロジェクトの価値評価

不確実性の下での企業戦略を考える上で，プロジェクトの価値評価（事業価値評価）を適切に行うことは基本的な要件である．プロジェクト評価の伝統的な方法は，正味現在価値（NPV）法である．この方法は分かりやすく使いやすい反面，プロジェクトの持つ不確実性や柔軟性を十分に反映できていない．それらを補う考え方のひとつとしてリアル・オプションが導入されている．

NPV法とリアル・オプションとを組み合わせた方法は有効性を期待できるが，いくつかの問題点も持っている．一番の問題点は，評価対象のプロジェクトが市場を前提にした理論を適用することが妥当なプロジェクトであるか否かである．妥当なものであれば金融オプションでなされている議論の多くが適用可能であろう．しかし，多くの場合には市場のない資産（non-tradable assets）を扱う問題であり，その場合には別の理論が必要になる．

この場合に有効と思われる理論に，効用無差別価格（utility indifference price）とリスク尺度（risk measure）の理論があり，現在の最先端の研究として進展中である．本稿では，効用無差別価格理論の紹介とそれに基づくプロジェクト評価法を論じる．

12.1　正味現在価値（NPV）法とその問題点

正味現在価値（NPV）法の要点

従来からある標準的なプロジェクトの価値評価法は，正味現在価値（NPV）法，または割引キャッシュフロー（割引キャッシュフロー）法と呼ばれるものである．この方法は良く知られたものであり次のように要約できる．

あるプロジェクトの初期投資額 I_0 とキャッシュフロー列 $\{F_t, t=0,1,2,...\}$ が与えられたとする．このとき，キャッシュフローの現在価値は割引率 $1+r$ を適当に定めることにより

$$\sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

で与えられる．正味現在価値（NPV）は

$$-I_0 + \sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

で定義され，この値の正負により，実行（投資）すべきプロジェクトか否かを判断する．

これが正味現在価値（NPV）法の要点である．これを，以下では古典的NPV法と呼ぶことにする．

古典的NPV法の問題点

古典的NPV法の問題点は，次の３点といえよう．

（１）不確実性

将来のキャッシュフローは不確実性を持っている．したがって，キャッシュフロー列 $\{F_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ は確率過程として扱われるべきであるが，通常は予想される平均値（期待値），または何らかの意味での予測値で代用されている．不確実性の中身についての情報がほとんど無いならば仕方ないが，現実にはその分布などについてかなりの情報がありうる．それらの情報が十分には反映されていないと言える．

（２）リスク

不確実性に基づくリスクがあり，それを考慮に入れた評価が要請される．古典的なNPV法ではこのリスクへの考慮は割引率 $1+r$ を定める際になされる．それは経験的になされているのが一般的であり，理論的な道具としては分散が考慮に入れられている程度といえる．不確実性の中身についての情報がより多くあればその情報を利用したた形でのリスクへの対処法があって良いだろう．

（３）柔軟性

プロジェクトの実行は，一度判断を下したら最初の方針通りにづっと続けられるというものではない．中には途中での変更が不可能なものもあろうが，多くのものはいくつかの選択肢の中から状況に応じて適切な選択肢を選びながら実行されてゆく．このような状況に応じた選択の柔軟性は価値評価の際に考慮に入れられるべきである．

新しい視点と理論の導入

上で見た古典的NPV法の問題点を改良したり解決したりし得る可能性はいくつか考えられる．この点について考察する．

（１）リアル・オプション

オプションとはもともといくつかの選択肢の中から最適なものあるいは必要なものを選択する

ことである．NPV法の問題点の（３）で述べたように，プロジェクトの実行に当たってはいくつかの選択肢の中から最適なものを選択しうる．この柔軟性を考慮に入れた評価の可能性を持ったものとして，リアル・オプションの理論またはリアル・オプション・アプローチがある．

現在のリアル・オプションの研究の中には２つの面が混在してしているように思える．その第１は，金融オプションについて得られた研究成果としての手法をリアル・オプションの分野に適用しようというものである．もうひとつは，オプションの価格理論という視点を持ちつつ，原資産の特長により既存のオプションの理論ではカバーされない分野の理論を確立しようというものである．

リアル・オプションという言葉はもともとは原資産が金融資産か実物資産かという意味での命名であるが，理論研究の立場で言えば，原資産過程の持つ経済学的な性質，すなわち，１）十分に効率的とみなせる市場が存在しているか，２）市場が存在していないか，３）その中間(市場が存在するが必ずしも効率的とは言えない，または間接的に関連する市場がある，など）であるか，による違いでの議論の方が分かりやすく意味があるといえる．１）は「金融オプション」に関して標準的に研究されてきた裁定理論を基礎とした理論の対象である．２）は，いわゆるnon-tradable assetsに対する理論として現在発展中のものであり，３）もその延長上にある．

リアル・オプションの中で何に焦点を当てて研究したいのかに依存して研究方法も違ってくる．プロジェクト評価とか新規企業の評価などに関心の中心がある場合には，non-tradable assetsに対する理論が中心的な役割を果たすだろう．それらの理論は，以下で述べる「効用無差別価格」の理論と「リスク尺度」の理論として，研究途上にある．

（２）効用無差別価格

不確実性やリスクへの対応の仕方として，もっとも初等的に考えられることは平均と分散で対応しようというものであろう．これだけでは十分とは言えない，ということがNPV法の問題点の（１）と（２）として挙げたことである．これに対する対応法としては，経済理論で基本的な効用の概念に基づいた期待効用理論がある．この理論に基づいた価格である効用無差別価格[1)]が有効と思える．これらの理論については，次節で詳しく述べる．

（３）リスク尺度

効用無差別価格を，リスク評価の立場から見直して一般化した概念といえる．これについては，稿を改めて検討したい．

12.2　期待効用理論に基く価値評価法

効用関数と期待効用

効用関数を $u(x)$ とする．リターン（収益）は不確実であるので，これを確率変数 X で示すこ

１）類似のものとして確実性等価がある

とにする．この時に得られるであろう効用は $u(X)$ である．その期待値 $E[u(X)]$ を期待効用と呼び期待効用の大きいものを価値が高いものと判断する．

効用関数としては指数型効用関数 $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \alpha > 0$ と冪型効用関数 $u(x) = x^{\beta}, 0<\beta<1$ とがよく使われる． $u(x) = x$ のときには $E[u(X)] = E[X]$ であり期待効用は単なる平均と同じになる[2)]．

効用無差別価格

リターン X の期待効用理論に基づく価値は次式

$$E[u(-v+X)] = u(0)(=0)$$

を満たす v として定義される効用無差別価格（utility indifferent price）である[3)]．この定義式の意味は，「X なる不確実なリターンを受け取る権利を得るのに v だけ支払ったとき，期待収益は0となる」ということであり，この意味で X と v とは釣り合っていることになる[4)]．$u(x) = x$ の時には $v = E[X]$ となり平均値となるが，一般の効用関数の時には平均値とは異なった値になる．
効用関数 $u(x)$ が上に凸な関数のとき，一般に $v \leq E[X]$ が成立する．実際，Jensenの不等式により

$$u(-v+E[X]) \geq E[u(-v+X)] = u(0)$$

であり， $u(x)$ の単調性より $-v+E[X] \geq 0$ が成立する．これで $v \leq E[X]$ が言えた．

X がリスクのないとき，すなわち X がノンランダムなときには $v = E[X]$ であるが， X がリスクのあるときには一般に $v < E[X]$ となり， X の価値 v は $E[X]$ より $E[X] - v$ だけ低くなる．この差 $E[X] - v$ は X のリスク・プレミアムと呼ばれる．期待値 $E[X]$ のみに注目している理論の場合には，この X のリスク・プレミアムを考慮に入れていないことになる．その分甘い評価をしていることになる．

効用無差別正味現在価値

リスク・プレミアムを考慮に入れた価値評価法を，NPV法の考え方を踏襲しつつ上の効用無差別価格の理論に基づいて導入しよう．

今，不確実性を伴ったキャッシュフロー（すなわち確率過程）

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_T\}$$

が与えられたとして，これの現在価値および正味現在価値を考察する．以下，割引率は $1+r$ とし現時点での投資額を I_0 とする．

2）効用関数 $u(x)$ の定義域は，消費のような場合には $\{x \geq 0\}$ でよいが，リスクのあるリターンを扱う場合には $\{-\infty < x < \infty\}$ で考えたい．以下では，$u(x)$ の定義域は $\{-\infty < x < \infty\}$ であるものとする．

3）より正確には，現在の所有量が x_0 であるとき， $E[u(x_0 - v + X)] = u(x_0)$ となる v と定義され，一般には v は x_0 に依存して決まる．

4）似た概念である「確実性等価」は， $u(v) = E[u(X)]$ なる v として定義される．

（１）Xの古典的現在価値

古典的NPV法では平均の現在価値を計算する．したがって，現在価値（*PV*）と正味現在価値（*NPV*）は次式で与えられる．

$$PV(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{E[X_t]}{(1+r)^t},\ \ NPV(\mathbf{X}) = -I_0 + PV(\mathbf{X}).$$

ここで，$PV(\mathbf{X})$ は次のようにも表現されることを注意しておこう．

$$PV(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{E[X_t]}{(1+r)^t} = E\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{X_t}{(1+r)^t}\right].$$

（２）Xの期待効用理論に基づく現在価値

キャッシュフローがランダムな場合には，その現在価値もランダムなものと考える方が自然な考え方である．すなわち，古典的 *PV* の計算式において期待値をとる前のランダムな現在価値に注目し，ランダムなキャッシュフロー**X**のランダムな現在価値 $RPV(\mathbf{X})$（random present value）を

$$RPV(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{X_t}{(1+r)^t}$$

で定義する．ここで，$RPV(\mathbf{X})$ は確率変数であること，および $E[RPV(\mathbf{X})] = PV$ なる関係を注意しておこう．

このランダムな現在価値 $RPV(\mathbf{X})$ の効用無差別価格を考え，それを**X**の効用無差別現在価値（utility indiference present value）と呼び，$UPV(\mathbf{X})$ で示すことにする．$UPV(\mathbf{X})$ は次の v についての方程式

$$E[u(-v + RPV(\mathbf{X}))] = 0$$

の解である．

さらに，**X**の効用無差別正味現在価値（utility indiference net present value）$UNPV(\mathbf{X})$ を次の $\hat{v}$ についての方程式

$$E[u(-\hat{v} - I_0 + RPV(\mathbf{X}))] = 0$$

の解として定義する．

v と $\hat{v}$ についての方程式を比較して $v = \hat{v} + I_0$ なる関係が分かる．これより

$$UNPV(\mathbf{X}) = -I_0 + UPV(\mathbf{X}). \tag{12. 1}$$

の関係が分かる．あるいは，この式を $UNPV(\mathbf{X})$ の定義式に採用しても同じである．

ここで，効用関数として $u(x) = x$ を採用した場合には $UNPV(\mathbf{X})$ は古典的な *NPV* に一致することを注意しておこう．

プロジェクト評価法の定式化

前章で述べたプロジェクトの価値評価の方法は，期待効用理論を基本として，その理論の枠組みの中でNPV法の考え方を拡張したものである．この方法は，古典的なNPV法の弱点のうち，

（１）の不確実性と（２）のリスクへの対応を図ったものである．さらの（３）の柔軟性を取り入れた理論の構築にはオプションの評価の理論が必要である．

その理論として有力なものはリアル・オプションの理論である．ただし，すでに述べたように，リアル・オプション法を採用する場合にはその前提条件を十分に注意しなくてはいけない．もしも市場の存在の前提が満たされていれば，オプション価格の標準的な理論（Black-Scholesの理論など）が適用可能である[5)]．しかし，プロジェクトの価値評価の場合にはこの前提が満たされていないのが一般的であると考えられる．

従って，プロジェクトの価値評価の場合に有効と考えれる方法は，リアル・オプションや数理ファイナンスの理論の中でnon-tradable assetに関するオプションの価格理論であると言うことができる．筆者は，この分野で重要なものは効用無差別価格理論とリスク尺度の理論である，と考えている．この考えに従って，前節ですでに効用無差別価格理論を取り入れた議論をした．本節では，これの延長上にリアル・オプション・アプローチを加味してプロジェクトの柔軟性を考慮に入れた評価法を確立する[6)]．

（１）基本となるプロジェクトの確定

価値評価の対象となるプロジェクトの内容を明確にしなくてはならない．そして，初期投資額 I_0 およびキャッシュフロー $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_T\}$ を算定する．ここでキャッシュフローは不確実性を伴っており，確率過程（＝時系列）として定式化される．その確率的な性質（分布など）は特定化されているものとする．

（２）効用関数の確定

期待効用理論を適用するためには，適切な効用関数を一つ採用し確定しておく必要がある．どのようなタイプの効用関数を採用するかは，プロジェクトの実施主体の考え方に依存して決定すべきものであるが，標準的なものとしては指数型効用関数 $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0,$ を採用し，リスク回避度のパラメーター α の決め方を工夫するのが妥当な方法の一つと言えよう．

（３）基本となるプロジェクトの価値評価

基本プロジェクトの初期投資額，キャッシュフロー，および効用関数が定まれば，前節で述べた期待効用理論に基づいた方法・手順により基本プロジェクトの価値を評価することができる．

１）ランダム現在価値 $RPV(\mathbf{X})$ を計算する．これは確率変数であり，分布を持っている．

２）効用無差別現在価値 $UPV(\mathbf{X})$ を計算する. これは, キャッシュフロー $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_T\}$ の期待効用理論に基づく現在価値である．

３）効用無差別正味現在価値 $UNPV(\mathbf{X})$ を計算する．これは，期待効用理論に基づくプロジェクトの正味現在価値である．

５）事実，標準的なリアル・オプションの書物のほとんどははこのような立場で書かれているように思える．

６）効率的な市場を前提にした議論の場合には，標準的なリアル・オプションの方法を適用できるので，それで十分だろう．本稿は，この前提が成立していない場合に適用可能な方法の開発を目指している．

（４）適用可能なオプションの検討

基本となるプロジェクトに関して，適用可能なオプション（延期オプション，拡大オプション，など）が存在するかを検討する．存在する場合には，それらのオプションの付いたプロジェクトについて価値評価をすることになる．なおこの時，オプション採用に伴う追加費用とオプション付プロジェクトのキャッシュフローを算定しておかねばならない．

（５）オプション付プロジェクトの価値評価

オプション付プロジェクトがいくつか考えられるとき，その各々に対して期待効用理論に基づいた価値評価を行う．すなわち，その各々に対して新たに算定された初期費用と（追加費用も含んだ）キャッシュフローに基づいて効用無差別正味現在価値の計算を行う．

（６）プロジェクト採用の可否の判断

以上から，いくつかのオプション付プロジェクトの効用無差別正味現在価値が得られていることになる．この値が一番高いものが考えられる中でベストなものと判断される．その値が正値であるとき，対応する（オプション付）プロジェクトの実行が検討されることになろう．もしもその値が負値であったならば，プロジェクトは実行されないことになろう．

（2009年11月８日受領）

平成22年２月１日発行

編集者　名古屋市立大学経済学会

名古屋市瑞穂区瑞穂町字山の畑１

印刷所　㈱正鵠堂