4. 寄稿

4.1 結び目の研究とコンピュータ

鎌田 直子

現代数学でコンピュータを研究に活用するケースが多く見られます．四色問題の解決もその一例です．私の専門である結び目理論でもコンピュータが活躍しています．

結び目理論は3次元空間内($\mathbb{R}^3$)の1次元閉多様体を研究対象とする分野です．低次元トポロジーでは，3次元空間内($\mathbb{R}^3$)の1次元閉多様体，4次元空間内($\mathbb{R}^4$)の2次元閉多様体(曲面結び目)を研究対象とすることが多いですが，高次元の場合も定義され，一般的にはn次元空間内の($\mathbb{R}^n$)の$n-2$次元閉多様体を$\mathbb{R}^n$内の結び目といいます．複数の結び目が合わさったものは絡み目と呼ばれます．図1は左から順に，三葉結び目，8の字結び目，ホップ絡み目，ホワイトヘッド絡み目と呼ばれる有名な結び目，絡み目です．

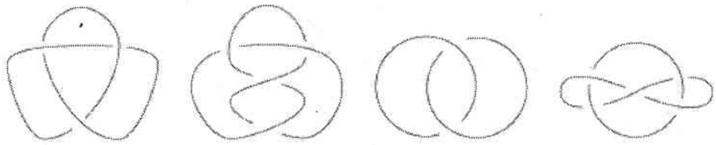

図1: 結び目，絡み目の例

結び目理論の歴史は1880年代にさかのぼります．Kelvinが原子はエーテルが結び目になったものであるという仮説をたて，元素の一覧を作成する目的でTaitが結び目の一覧表を構成しました．Littleも同じ時期に結び目の一覧表を作成しています．エーテルの存在は否定されましたが，結び目は実在します．それは数学の中の世界だけでなく，現実の我々の世界の中の様々な場所に存在するのです．また，結び目は3次元多様体の研究とも関係し，他の科学の分野(DNAや高分子など)の研究にも活用されてきています．

3次元空間内($\mathbb{R}^3$)で2つの結び目が連続に移り合うとき，それらは同位であると言います．結び目理論の目標は結び目，絡み目を同位なものに分類することです．2つの結び目が同位であるかどうか，つまり，連続的に移り合うかどうかを判定することは，思うほど簡単ではありません．例えば，図2の2つの結び目は，TaitとLittleによる結び目の一覧表が作られてから数十年後(1974年)になってようやく同位であったことが分かりました．これを発見したのがKenneth Perkoで，この2つの結び目は現在Perkoのペアと呼ばれています．

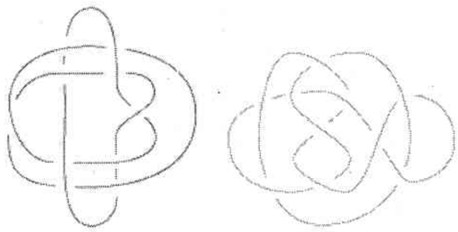

図2: Perko のペア

2つの結び目が同位であることを示すためには，一方の結び目を他方へ連続的に動かす変形を見つければいいのですが，これは容易ではありません．何回か変形してみて移らなかったとしてもこれらが同位ではないと断言することはできません．そこで「不変量」が登場します．(結び目の)不変量は結び目の集合から他の数学的な対象(集合)への写像のことです．この写像による結び目の像をその結び目の不変量の値といいます．2つの結び目の不変量の値が異なるとき，これらの結び目は同位ではないと言うことができます．しかし，逆はいえません．すなわち，2つの結び目の不変量の値が等しくても，これらの結び目が同位であると結論づけることはできません．最小交点数，結び目解消数，Alexander多項式，Jones多項式，結び目群，結び目カンドルなど様々な不変量が構成されています．最小交点数は定義の簡単な不変量の1つです．結び目の専門書にはたいてい巻末に結び目の一覧表がのっていますが，これは最小交点数によって分類されています．結び目を2次元の平面に描いた図を結び目図式といい，大雑把にいうと$\mathbb{R}^3$の中の結び目を$\mathbb{R}^2$ に射影して，交点に上下の情報を与えたものです．同位な結び目に対して幾つもの図式が定まりますが，その図式のなかで最小の交点数を結び目の最小交

点数と定義します．結び目の最小交点数を求めることは一般にはとても難しいです．ある結び目図式に対して，それが最小交点の結び目図式に見えても，それよりも少ない結び目図式に変形できるかもしれません．最小交点数を求めるために不変量を利用することもあります．最小交点数が同じでも同位でない結び目が多く存在することにも注意しておきます．最小交点数は定義はとても簡単ですが，実は非常に扱いにくいものなのです．

定義が簡単で，結び目図式から容易に計算できる不変量としてはFoxの3彩色可能性があります．これは3彩色可能であるか，そうでないかという2つのグループに結び目を分類するもので，とても荒い分類です．しかし，これを使えば三葉結び目と8の字結び目が同位でないことが分かります．

定義は少し複雑になりますが，Alexander多項式，Jones多項式などのように（ローラン）多項式に値を持つ不変量もあります．これらは結び目図式から計算ができます．絡み目群と結び目カンドルは，群やカンドルという代数的な対象を値にとる結び目の不変量です．一般に，群やカンドルが同型であるかどうかを判定することは難しいので，得られた不変量の値(群，カンドル）をさらに，群やカンドルの不変量を使って比較することもあります．

このような結び目の不変量を構成したり計算するために様々な数学的な集合や手法が担ぎだれます．不変量の計算は複雑で膨大となることがあり，コンピュータが有効になります．そのためのソフトウェアの開発，研究に関する分野をコンピュータトポロジーといいます．（コンピュータトポロジーは，結び目に限らず様々なトポロジーを対象にしたもので，奈良女子大学の落合豊行名誉教授が命名したものと聞いています．）同大学の山下靖教授，神戸高等専門学校の児玉宏児教授らもそれらの研究をされています．彼らの作成したソフトウェアは多くの結び目理論研究者が利用しています．また，各研究者が独自にプログラムを組むこともあります．不変量の計算だけでなく，結び目の一覧表の作成にもコンピュータは有効に利用されています．私も仮想結び目の一覧表を作成する際に結び目図式のリストの作成とそれらの不変量の計算をコンピュータで行いました．最近では，Mathematicaなどの数学ソフトウェアも結び目理論の基本的なデータを持っていて，よく知られた結び目の場合はそれらのざまざまなデータを調べることができます．

表1：結び目の最小交点数と個数

最小交点数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
個数	0	0	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988	46972	253293	1388705

コンピュータの活用は結び目理論の研究を促進させました．1990年までの100年ぐらいの間に結び目の一覧表は10交点まで確定されていました．しかし，現在は16交点まで分類されています．表1にあるように交点数が増加すると結び目の個数も飛躍的に増えます．
さらにインターネットの普及も大きく研究速度を速めている理由の1つです．ウィキペディアでは専門家でなくても一般的な情報を瞬時に得ることができます．また，研究者や研究機関が独自に結び目の情報をホームページで公開してもいます．以下はそれらのサイトの一例です．
http://www.indiana.edu/~knotinfo/
http://math.rice.edu/~friedl/programs.html
http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/
しかし，どの研究分野も同じですが，コンピュータから100%の成果が得られる訳ではありません．私が仮想結び目の一覧表を作成した際も，ある程度までの同位な結び目の判定はプログラム上で行いましたが，最終的には自分自身の手で（頭で？）判定を行いました．また，大変ですが，手計算を行ったり，自らリストを作成することのメリットもあります．自ら手を動かしてゆくことで法則や性質を発見できることもあるからです．一方で，数学では厳密さを求めますが，産業などでは実用性が求められます．コンピュータで時間をかけずにある程度の精度の計算ができればよいという場面も今後ますます起こることでしょう．しばらくは，このような

形でコンピュータを利用しながら数学は発展してゆくと思います．コンピュータがもっと踏み込んだ形で数学の発展に寄与することが可能であるかどうか私にはわかりません．しかし，コンピュータが数学の定理を発見するようになったりしたら，面白い反面私たち人間は何もすることがなくなってしまいます．それは寂しいです．

参考文献

[1] C・C・アダムス(金信泰造訳)，結び目の数学，培風館，1998
[2] 河内明夫編，結び目理論，シュプリンガー・フェアラーク，1990
[3] 落合豊行，山田修司，豊田英美子，コンピュータによる結び目理論入門，牧野書店，1996
[4] J. Hoste, *The enumeration and classi_cation of knots and links,* in "Handbook of Knot Theory", pp. 209{232, Elsevier, Amsterdam, 2005
[5] J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks, *The _rst 1, 701, 935 knots,* Math. Intelligencer, 20 (1998), 33-48
[6] N. Kamada, *Miyazawa polynomials of virtual knots and virtual crossing numbers,* "Intelligence of Low Dimensional Topology 2006" in the Knots and Everything Book Series. (World Scientific Publishing Co.) 40(2007), pp. 93-100