

# オークションにおける収入同値定理再考<sup>1)</sup>

神 山 眞 一

## 1. はじめに

オークション<sup>2)</sup> (auction) は価格形成のための一手段であるが、価格決定機能の他にもいくつかの機能を有している。まず売り手に買い手についての情報を伝達する点において有効である。買い手は販売される商品について、売り手よりも多くの情報を持っていることがある。好事例として美術品のオークションがある。美術品に対する需要は買い手の嗜好に大きく依存し、それは買い手にしかわからないものである<sup>3)</sup>。もう一つは取引の効率性と公正性に役立つことである。最も高く評価した者が商品を取得するということは、パレート最適な分配であり、公の場で価格を決定することは公正の点で有効である。公共工事の入札が好事例であろう。

オークションの理論は、1996年にノーベル賞を受賞した Williams Vickrey による先駆的研究を基に発展し、最近では単品オークションやシェアオークション<sup>4)</sup> に関する理論的・実証的な研究だけでなく、現実問題への応用に関する研究も進んでいる<sup>5)</sup>。

Vickrey (1961) は、競り下げ方式 (Dutch Auction)、第一価格方式 (First Price Auction)、競り上げ方式 (English Auction)、第二価格方式 (Second Price Auction) の4種類のオークションにおける単品オークションを取り上げ、私的価値<sup>6)</sup> が一様分布し、全参加者がその分布型を

---

1) 本稿は、神山・井上 (2010) を全面的に加筆・改訂したものである。

2) 「オークション」という用語は、「セリ」ないし「競売」という用語と同義的に使用されているが、近年インターネットオークションが普及してきたことから、「セリ」ないし「競売」よりも一般的に使用されているようであるので、本稿でも「オークション」という用語を用いることとする。

3) 近年「開運!なんでも鑑定団」というテレビ番組が人気を博しているが、この番組も「売り手 (当該財所有者)」が「買い手」の嗜好 (買い手の評価額) がわからないために成り立つものであり、オークションではないものの、番組に出品することで買い手の評価額を知ることができる。このことから、当該番組はオークションの機能の一部を担っているものと言うことができる。

4) 単品オークションとはオークションに上場される財の数量が1単位の場合であり、シェアオークションは複数単位の財が上場され複数の参加者が分けて落札できるオークションである。

5) 上田 (2010)、横尾 (2006)、Cramton 他 (2006)、Klemperer (2000)、Krishna (2002)、Menezes and Monteiro (2005) などに詳しい。

6) 私的価値とは、オークション参加者の当該財に対する価値評価額ないし支払い意志のことである。

知っているとの想定で分析を行っている。

競り下げ方式 (Dutch Auction) は、提示価格が徐々に下がっていき、そのときの提示価格で購入を希望する者が現れたとき、その提示価格で落札できる方法であり、私的価値が最も高い参加者が落札できる。第一価格方式 (First Price Auction) は入札等で採用されている方法であり、一番高い応札額を提示した参加者が落札できる。このことから、競り下げ方式 (Dutch Auction) と第一価格方式 (First Price Auction) は同値なオークション方法とされている。第二価格方式 (Second Price Auction) は、入札等において最も高い応札額を提示した者が2番目に高い応札額で落札できる方法である。競り上げ方式 (English Auction) は、提示価格が徐々に上がっていき、最後から2番目の参加者が購入意志を示さなくなったとき、そのときの価格で最後に残った参加者が落札する方法である。すなわち、2番目に高い私的価値を“少し上回った”価格で落札額が決まることになる。“少し上回った”部分が無限小であれば、競り上げ方式 (English Auction) と第二価格方式 (Second Price Auction) は同値なオークション方法となる。以上のことから、本稿では、Vickrey (1961) と同様に、競り下げ方式 (Dutch Auction) と第一価格方式 (First Price Auction) ならびに競り上げ方式 (English Auction) と第二価格方式 (Second Price Auction) をそれぞれ同値なものとして分析を行っている。

Vickrey (1961) での成果の中で最も有名なものは収入同値定理 (revenue equivalence theorem) であり、上田 (2010) では、次のようにまとめられている。

### 【収入同値定理】

すべての入札参加者は、リスク中立的で、ある共通した狭義増加関数で記述される連続な分布関数から互いに独立した私的価値を得るものとする。このとき、(1)財が最も高い私的価値を持つ入札参加者に配分され、(2)最も低い私的価値をつけた入札参加者の得る期待余剰はゼロとなるようなオークションであれば、どんなオークション方式であっても売り手の得る期待収入は同じとなる。

収入同値定理とは、競り下げ方式 (第一価格方式) と競り上げ方式 (第二価格方式) のどのオークション方法を採用したとしてもオークション主催者の期待収入が同一になるとのもので、主催者の期待収入はオークション方法によらずに一定であるとの定理である。この定理は、オークション主催者が採用すべきオークション方法について思い悩む必要がないとした、非常に優れた定理である。この定理がより一般化された設定においても成り立つかどうかについての研究は多数行われてきた。Myerson (1981), Riley and Samuelson (1981), 上田 (2009) 等においては、私的価値が一様分布でなく一般的な分布においても収入同値定理が成り立つことが証明されている。しかし、現実には、そこで想定している前提条件が満たされない場合が多

く、収入同値定理が成り立たないことを示した研究成果が多数報告されている。前提条件が緩められたとき、オークション方法によってはオークション主催者の期待収入に差が生じ、オークション主催者にとって期待収入を最大化するオークション方法が存在することになる。上田（2010）において、収入同値定理が成り立たなくなる前提条件として、私的価値の正の相関、共通価値財と勝者の呪い、共謀、非対称性、参入、リスク回避性向、予算制約があるとされており、前提条件ごとに期待収入の大小関係を明らかにした研究がサーベイされているので、ここで表1に転載することにする。

本稿では単品オークションのみを分析対象にしているが、現実にはシェアオークションないし複数財のオークションが取り扱われる場合も多い。シェアオークションの場合に収入同値定理が成り立つが否かについての研究も多くあるが、上田（2010）に示されているように、オークションの方式や入札参加者の行動が複雑になり、単品オークションについて得られた収入同値定理等の結論が必ずしも妥当しないとされている。

本稿は、Vickrey（1961）を若干一般化した状況において収入同値定理が成り立つかどうかを検証することを目的としている。一般化として、まず私的価値の分布を一様分布（以下「0次型」という。）から三角形分布（以下「1次型」という。）、2次関数型分布（以下「2次型」という。）、3次関数型分布（以下「3次型」という。）、4次関数型分布（以下「4次型」という。）へと変更した場合を考えている。さらに、Vickrey（1961）は全参加者が私的価値分布特に分布の上限値を知っている状況を想定しているが、本稿では全参加者が私的価値の分布形状は知っているがその上限値を知らない状況へと一般化している。

2節において、本稿で扱うモデルについて説明を行い、3節と4節で競り下げ方式と競り上げ方式について、0次型～4次型の8つの分布型それぞれについてオークション参加者の最適戦略を導出している。5節と6節において、競り下げ方式と競り上げ方式について参加者が最適戦略を採用する場合の主催者の期待収入を、0次型～4次型の8つの分布型それぞれについて数値計算により求めている。7節において、競り下げ方式と競り上げ方式における主催者の

表1 オークション方式の売り手の期待収入への影響

前提条件	売り手の期待収入
私的価値の正の相関	競り上げ方式 > 第二価格方式 > 第一価格方式 = 競り下げ方式
共通価値財と勝者の呪い	競り上げ方式 > 第二価格方式 > 第一価格方式 = 競り下げ方式
共謀	第一価格方式 > 第二価格方式, 競り上げ方式
非対称性	第一価格方式 > 第二価格方式, 競り上げ方式
参入	競り下げ方式, 第一価格方式, 第二価格方式 > 競り上げ方式
リスク回避性向	第一価格方式 > 第二価格方式
予算制約	第一価格方式 > 第二価格方式

期待収入を比較し、収入同値定理が成り立つかどうかを検証し、収入同値定理は一部の特殊な状況下では成り立つものの、一般的には成り立たないとの推論を得ている。しかし、厳格な意味では収入同値定理は成り立たないが、数値的に見たとき、オークション方式による期待収入の差は僅か（数パーセント以下）であり、実用的には収入同値定理が常に成り立つとの推論を得ている。

## 2. モデル

Vickley (1961) のモデルでは、私的価値に関する情報を全参加者が知っているものとしているが、本稿では、全参加者が私的価値の分布形状は知っているが分布の上限値を知らないものとする。現実のオークションにおいては、他のオークション参加者の私的価値評価については不明であると考えられる。もし、他の参加者の私的価値に関する情報を知り得るものであれば、オークション自身が成立しないと考えられ、他の参加者の情報が知り得ないからこそオークションが意味あるものになると考えられる。この意味で、本稿での想定は、Vickley (1961) の想定を一般化したものと見なすことができる。

オークション参加人数は  $n$  人であり、上場数が 1 単位である単品オークションを考える。参加者  $i$  にとっての財の私的価値が  $V_i$  であるものとし、 $V_i$  は 0 から  $a$  の間で分布し、密度関数が  $f(x)$  であるものとする。密度関数  $f(x)$  は  $f(x) \geq 0$ 、 $\int_0^a f(x) dx = 1$  でなければならず、 $V_i$  の累積密度関数を  $F(x)$  で表すとき、 $F(x)$  は、 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 、 $F(0) = 0$ 、 $F(a) = 1$  となる。なお、 $F(x)$  はある  $V_i$  が  $x$  以下となる確率を意味する。さらに、参加者  $i$  が実際に応札する価格を  $B_i$  で表すことにする。

本稿においては、私的価値分布として次の 8 つの型を考える。

$$(a) \quad 0 \text{ 次型} \quad f(X) = \frac{1}{a} \quad (2.1)$$

$$(b) \quad 1 \text{ 次 A 型} \quad f(X) = \frac{2}{a}(1-x) \quad (2.2)$$

$$(c) \quad 1 \text{ 次 B 型} \quad f(X) = \begin{cases} \frac{4}{a}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{a}(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$(d) \quad 1 \text{ 次 C 型} \quad f(X) = \frac{2}{a}x \quad (2.4)$$

$$(e) \quad 2 \text{ 次型} \quad f(X) = \frac{6}{a}(1-x)x \quad (2.5)$$

$$(f) \text{ 3次A型 } f(X) = \frac{12}{a}(1-x)x^2 \quad (2.6)$$

$$(g) \text{ 3次B型 } f(X) = \frac{12}{a}(1-x)^2x \quad (2.7)$$

$$(h) \text{ 4次型 } f(X) = \frac{30}{a}(1-x)^2x^2 \quad (2.8)$$

ただし、 $x = X/a$  であり、それぞれの分布型を図示すれば次のようになる。

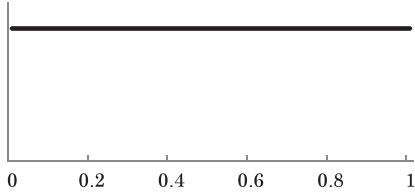


図1 0次型の私的価値分布

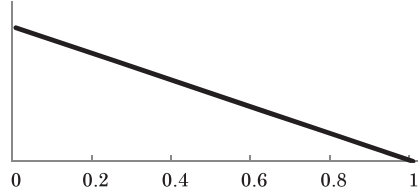


図2 1次A型の私的価値分布

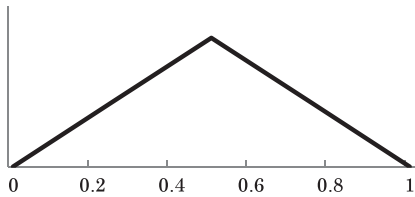


図3 1次B型の私的価値分布

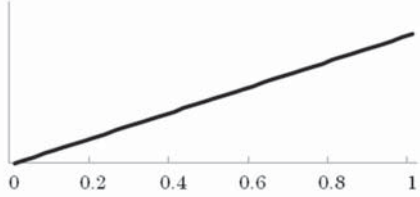


図4 1次C型の私的価値分布

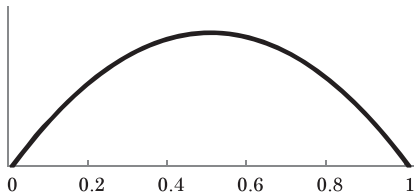


図5 2次型の私的価値分布

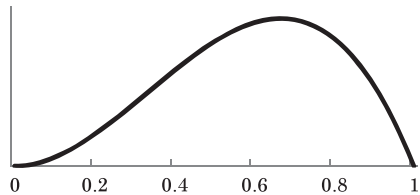


図6 3次A型の私的価値分布

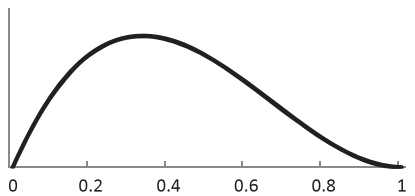


図7 3次B型の私的価値分布

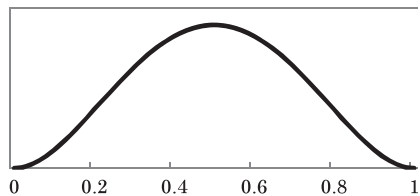


図8 4次型の私的価値分布

このとき、私的価値分布ごとの累積密度関数は次のようになる。

$$(a) \text{ 私的価値分布が0次型のとき} \quad F(X)=x \quad (2.9)$$

$$(b) \text{ 私的価値分布が1次A型のとき} \quad F(X)=(2-x)x \quad (2.10)$$

$$(c) \text{ 私的価値分布が1次B型のとき} \quad F(X)=\begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-2(1-x)^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$(d) \text{ 私的価値分布が1次C型のとき} \quad F(X)=x^2 \quad (2.12)$$

$$(e) \text{ 私的価値分布が2次型のとき} \quad F(X)=(3-2x)x^2 \quad (2.13)$$

$$(f) \text{ 私的価値分布が3次A型のとき} \quad F(X)=(4-3x)x^3 \quad (2.14)$$

$$(g) \text{ 私的価値分布が3次B型のとき} \quad F(X)=(6-8x+3x^2)x^2 \quad (2.15)$$

$$(h) \text{ 私的価値分布が4次型のとき} \quad F(X)=(10-15x+6x^2)x^3 \quad (2.16)$$

### 3. 競り下げ方式の最適戦略

競り下げ方式と第一価格方式の場合、参加者は、他の参加者の動向を見ることができない一発勝負となる。したがって付け値  $B_i$  を決めるに当たっては、2番目の人の金額を予想し、それに少し上乗せをして決めることになる。単品オークションの場合、参加者は自分こそが最高評価者であるとの思いでオークションに参加し、もし自分より高い評価者がいることが確実であれば、自分が落札できる可能性がないことから、オークションに参加しないことになる。

参加者  $i$  は、自分の  $V_i$  が最も高い、すなわち  $a=V_i$  であることを想定して、他の参加者の付け値を予想する。他の参加者の1人の付け値が自分の付け値  $B_i$  よりも低くなる確率は  $F(B_i)$  となる。自分以外の参加者が  $n-1$  人いるから  $B_i$  が最高の付け値となる確率は  $F(B_i)^{n-1}$  となる。

参加者  $i$  の期待利得  $J_i$  は、付け値を  $B_i$  としたときの利得が  $V_i - B_i$  であり、自分以外のすべての参加者の評価が  $B_i$  以下となる確率が  $F(B_i)^{n-1}$  であることから

$$J_i=(V_i-B_i)F(B_i)^{n-1} \quad (3.1)$$

となる。期待利得を最大化する  $B_i$  を求めるために  $J_i$  を  $B_i$  で微分すると

$$\frac{dJ_i}{dB_i}=\{(n-1)(V_i-B_i)f(B_i)-F(B_i)\}F(B_i)^{n-2} \quad (3.2)$$

となる。以下では、それぞれの私的価値分布について(3.2)式の解を求めることとする。

(3-a) 私的価値分布が0次型のとき

(3.2)式に(2.1)式と(2.9)式を代入することで次のようになる。

$$\frac{dJ_i}{dB_i} = \{(n-1)(v_i - b_i) - b_i\} b_i^{n-2} = \{(n-1)v_i - nb_i\} b_i^{n-2} \quad (3.3)$$

ただし,  $v_i = V_i/a$ ,  $b_i = B_i/a$  である<sup>7)</sup>.  $dJ_i/dB_i = 0$  を解くことで最適付け値  $b_i^* = B_i^*/a$  は

$$b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i \quad (3.4)$$

となり, 最大期待利得  $J_i^*$  は次のようになる。

$$J_i^* = a \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} v_i^n \quad (3.5)$$

(3-b) 私的価値分布が1次A型のとき

(3.2)式に(2.2)式と(2.10)式を代入することで次のようになる。

$$\frac{dJ_i}{dB_i} = \{2(n-1)v_i - 2m_{bi}b_i + (2n-1)b_i^2\} \{(2-b_i)b_i\}^{n-2} \quad (3.6)$$

ただし,  $m_{bi} = (n-1)v_i + n$  である.  $dJ_i/dB_i = 0$  の解は

$$b_i = 0, \quad 2, \quad \frac{m_{bi} \pm \sqrt{m_{bi}^2 - 2(n-1)(2n-1)v_i}}{2n-1}$$

であるが,  $0 < b_i \leq 1$  であり,  $b_i = 1$  のとき  $dJ_i/dB_i = -1 < 0$  となるので

$$\frac{m_{bi} + \sqrt{m_{bi}^2 - 2(n-1)(2n-1)v_i}}{2n-1} > 1$$

であり

$$0 < \frac{m_{bi} - \sqrt{m_{bi}^2 - 2(n-1)(2n-1)v_i}}{2n-1} < v_i$$

となるので, 最適付け値  $b_i^* = B_i^*/a$  は

$$b_i^* = \frac{m_{bi} - \sqrt{m_{bi}^2 - 2(n-1)(2n-1)v_i}}{2n-1} \quad (3.7)$$

となる. さらに, 最大期待利得  $J_i^*$  は次のようになる。

$$J_i^* = a (v_i - b_i^*) \{(2 - b_i^*) b_i^*\}^{n-1} \quad (3.8)$$

---

7)  $0 < V_i \leq a$  であるので  $0 < v_i \leq 1$  であり,  $B_i \leq V_i$  と考えられるので  $0 < b_i \leq 1$  となる。

(3-c) 私的価値分布が1次B型するとき

この場合は, (3.2)式ではなく(3.1)式に(2.11)式を代入することで次のようになる.

$$J_i = \begin{cases} a(v_i - b_i)(2b_i^2)^{n-1}, & 0 \leq b_i \leq \frac{1}{2} \\ a(v_i - b_i)\{1 - 2(1 - b_i)^2\}^{n-1}, & \frac{1}{2} \leq b_i \leq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

この $J_i$ を最大化する最適付け値 $b_i^* = B_i^*/a$ は, 次のようになる.

$$b_i^* = \begin{cases} 2 \frac{n-1}{2n-1} v_i, & v_i \leq n_c \\ \frac{2m_{ci} - \sqrt{4m_{ci}^2 - 2(2n-1)\{1 + 4(n-1)v_i\}}}{2(2n-1)}, & v_i > n_c \end{cases} \quad (3.10)$$

ただし,  $m_{ci} = n + (n-1)v_i$ ,  $n_c = \frac{2n-1}{4(n-1)}$ である. さらに, 最大期待利得 $J_i^*$ は次のようになる.

$$J_i^* = \begin{cases} a(v_i - b_i^*)(2b_i^{*2})^{n-1}, & 0 \leq b_i^* \leq \frac{1}{2} \\ a(v_i - b_i^*)\{1 - 2(1 - b_i^*)^2\}^{n-1}, & \frac{1}{2} \leq b_i^* \leq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

(3-d) 私的価値分布が1次C型するとき

(3.2)式に(2.4)式と(2.12)式を代入することで次のようになる.

$$\frac{dJ_i}{dB_i} = \{2(n-1)v_i - (2n-1)b_i\}b_i^{2n-3} \quad (3.12)$$

$dJ_i/dB_i = 0$ の解は

$$b_i = 0, \quad \frac{2(n-1)}{2n-1}v_i$$

であるが,  $0 < b_i \leq 1$ であり,  $0 < \frac{2(n-1)}{2n-1}v_i < v_i$ となるので, 最適付け値 $b_i^* = B_i^*/a$ は

$$b_i^* = \frac{2(n-1)}{2n-1}v_i \quad (3.13)$$

となる. さらに, 最大期待利得 $J_i^*$ は次のようになる.

$$J_i^* = a \frac{1}{2n-1} v_i \left\{ \frac{2(n-1)}{2n-1} v_i \right\}^{2(n-1)} \quad (3.14)$$



(3-e) 私的価値分布が2次型のとき

(3.2)式に(2.5)式と(2.13)式を代入することで次のようになる.

$$\frac{dJ_i}{dB_i} = \{6(n-1)v_i - m_{ci}b_i + 2(3n-2)b_i^2\}b_i \{(3-2b_i)b_i^2\}^{n-2} \quad (3.15)$$

ただし,  $m_{ci} = 3\{2n-1+2(n-1)v_i\}$  である.  $dJ_i/dB_i=0$  の解は

$$b_i = 0, \quad 1.5, \quad \frac{m_{ci} \pm \sqrt{m_{ci}^2 - 48(n-1)(3n-2)v_i}}{4(3n-2)}$$

であるが,  $0 < b_i \leq 1$  であり,  $b_i = 1$  のとき  $dJ_i/dB_i = -1 < 0$  となるので

$$\frac{m_{ci} + \sqrt{m_{ci}^2 - 48(n-1)(3n-2)v_i}}{4(3n-2)} > 1$$

であり

$$0 < \frac{m_{ci} - \sqrt{m_{ci}^2 - 48(n-1)(3n-2)v_i}}{4(3n-2)} < v_i$$

となるので, 最適付け値  $b_i^* = B_i^*/a$  は

$$b_i^* = \frac{m_{ci} - \sqrt{m_{ci}^2 - 48(n-1)(3n-2)v_i}}{4(3n-2)} \quad (3.16)$$

となる. さらに, 最大期待利得  $J_i^*$  は次のようになる.

$$J_i^* = a(v_i - b_i^*)\{(3-2b_i^*)b_i^{*2}\}^{n-1} \quad (3.17)$$

(3-f) 私的価値分布が3次A型のとき

(3.2)式に(2.6)式と(2.14)式を代入することで次のようになる.

$$\frac{dJ_i}{dB_i} = \{12(n-1)v_i - 2m_{di}b_i + 3(4n-3)b_i^2\}b_i^2 \{(4-3b_i)b_i^3\}^{n-2} \quad (3.18)$$

ただし,  $m_{di} = 2\{(3n-2)+3(n-1)v_i\}$  である.  $dJ_i/dB_i=0$  の解は

$$b_i = 0, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{m_{di} \pm \sqrt{m_{di}^2 - 36(n-1)(4n-3)v_i}}{3(4n-3)}$$

であるが,  $0 < b_i \leq 1$  であり,  $b_i = 1$  のとき  $dJ_i/dB_i = -1 < 0$  となるので

$$\frac{m_{di} + \sqrt{m_{di}^2 - 36(n-1)(4n-3)v_i}}{3(4n-3)} > 1$$

であり

$$0 < \frac{m_{di} - \sqrt{m_{di}^2 - 36(n-1)(4n-3)v_i}}{3(4n-3)} < v_i$$

となるので, 最適付け値  $b_i^* = B_i^*/a$  は

$$b_i^* = \frac{m_{di} - \sqrt{m_{di}^2 - 36(n-1)(4n-3)v_i}}{3(4n-3)} \quad (3.19)$$

となる。さらに、最大期待利得  $J_i^*$  は次のようになる。

$$J_i^* = a(v_i - b_i^*)((4 - 3b_i^*)b_i^{*3})^{n-1} \quad (3.20)$$

(3-g) 私的価値分布が 3 次 B 型するとき

(3.2) 式に (2.7) 式と (2.15) 式を代入することで次のようになる。

$$\frac{dJ_i}{dB_i} = g_g(b_i)(6 - 8b_i + 3b_i^2)^{n-2}b_i^{2n-3} \quad (3.21)$$

ただし、

$$g_g(b_i) = 12(n-1)(v_i - b_i)(1 - b_i)^2 - (6 - 8b_i + 3b_i^2)b_i \quad (3.22)$$

であり、 $dJ_i/dB_i = 0$  の解は、 $b_i = 0$  と 3 次方程式  $g_g(b_i) = 0$  の解となる。 $0 < b_i \leq 1$  であり、 $g_g(0) > 0$ 、 $g_g(1) < 0$ 、 $g_g'(0) < 0$ 、 $g_g'(1) > 0$  であることから、 $g_g(b_i) = 0$  は区間  $0 < b_i \leq 1$  で唯一の解を持ち、その解が  $dJ_i/dB_i = 0$  の解すなわち最適付け値  $b_i^* = B_i^*/a$  となる。さらに、最大期待利得  $J_i^*$  は次のようになる。

$$J_i^* = a(v_i - b_i^*)((6 - 8b_i^* + 3b_i^{*2})b_i^{*2})^{n-1} \quad (3.23)$$

(3-h) 私的価値分布が 4 次型するとき

(3.2) 式に (2.8) 式と (2.16) 式を代入することで次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dB_i} &= \{30(n-1)(v_i - b_i)(1 - b_i)^2 - (10 - 15b_i + 6b_i^2)b_i\}(10 - 15b_i + 6b_i^2)^{n-2}b_i^{3n-4} \\ &= g_h(b_i)(10 - 15b_i + 6b_i^2)^{n-2}b_i^{3n-4} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ただし、

$$g_h(b_i) = 30(n-1)v_i - 10\{6(n-1)v_i + 3n-2\}b_i + 15\{2(n-1)v_i + 4n-3\}b_i^2 - 6(5n-4)b_i^3 \quad (3.25)$$

であり、 $dJ_i/dB_i = 0$  の解は、 $b_i = 0$  と 3 次方程式  $g_h(b_i) = 0$  の解となる。 $0 < b_i \leq 1$  であり、 $g_h(0) > 0$ 、 $g_h(1) < 0$ 、 $g_h'(0) < 0$ 、 $g_h'(1) > 0$  であることから、 $g_h(b_i) = 0$  は区間  $0 < b_i \leq 1$  で唯一の解を持ち、その解が  $dJ_i/dB_i = 0$  の解すなわち最適付け値  $b_i^* = B_i^*/a$  となる。さらに、最大期待利得  $J_i^*$  は次のようになる。

$$J_i^* = a(v_i - b_i^*)((10 - 15b_i^* + 6b_i^{*2})b_i^{*3})^{n-1} \quad (3.26)$$

#### 4. 競り上げ方式の最適戦略

競り上げ方式と第二価格方式の場合、最高付け値提示者が2番目に高い付け値で落札できるので、落札者が参加者  $k$  としたとき、その利得  $J_k$  は私的価値  $V_k$  と2番目の付け根の差、すなわち

$$J_k = V_k - R_k \quad (4.1)$$

となる。ただし  $R_k = \max_{j \neq k} (B_j)$  である。

参加者  $i$  の最適戦略を考えたとき、 $B_i$  を  $R_i$  以下とすると落札者になれないので利得は0となり、 $B_i > R_i$  とすると落札者となり利得は  $V_i - R_i$  となる。まとめれば次のようになる。

$$B_i \leq R_i \text{ のとき } J_i = 0$$

$$B_i > R_i \text{ のとき } J_i = V_i - R_i$$

$V_i > R_i$  の場合は、 $B_i$  を  $R_i$  より高くすれば利得  $V_i - R_i > 0$  が得られるが、 $B_i$  を  $V_i$  より高い値にしても利得が変わらないこととなる。

$V_i \leq R_i$  の場合は、 $B_i > R_i$  とすると落札者にはなれるが利得は  $V_i - R_i < 0$  となり、正の利得が得られない。したがって、 $V_i < B_i$  としたとき、 $R_i$  が不明であることから、 $R_i < B_i$  となり利得が負になるリスクがある。

以上のことから、 $V_i < B_i$  としたとき、 $V_i > R_i$  の場合でも  $B_i = V_i$  とした場合以上の利得が得られず、 $V_i \leq R_i$  の場合は利得が負になるリスクがある。一方、 $B_i < V_i$  としたとき、 $R_i$  が不明であることから、 $B_i < R_i$  となり利得が0になるリスクがある。したがって、競り上げ方式と第二価格方式の場合は  $B_i \neq V_i$  とする経済的合理性がなく、 $B_i = V_i$  が最適戦略となる。

#### 5. 競り下げ方式における期待収入

競り下げ方式と第一価格方式の場合、全参加者が3節で示した最適戦略を採用すると仮定したとき、私的評価が  $V$  である参加者が落札できる確率は、自分以外の全消費者の私的評価が  $V$  以下であること、すなわち  $F(V)^{n-1}$  となる。この参加者は  $B^* = ab^*$  を付け値し、参加者が  $n$  人いることから主催者の期待収入  $\pi_1$  は次のようになる。

$$\pi_1 = n \int_0^a B^* F(V)^{n-1} f(V) dV \quad (5.1)$$

(5-a) 私的価値分布が0次型のとき

(5.1)式に(2.1)式、(2.9)式および(3.4)式を代入すると次のようになる。

$$\pi_1 = (n-1) \int_0^a v^n dV = (n-1)a \int_0^1 v^n dv = \frac{n-1}{n+1}a \quad (5.2)$$

(5.2) 式の数値解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.3333	0.5000	0.6000	0.6667	0.8182	0.9048	0.9355	0.9512	0.9608	0.9802

(5-b) 私的価値分布が1次 A 型のとき

(5.1) 式に (2.2) 式, (2.10) 式および (3.7) 式を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2n \int_0^a \frac{m_{bi} - \sqrt{m_{bi}^2 - 2(n-1)(2n-1)v_i}}{2n-1} (2-v)^{n-1} v^{n-1} (1-v) dV \\ &= \frac{2na}{2n-1} \int_0^1 \{m_{bi} - \sqrt{m_{bi}^2 - 2(n-1)(2n-1)v_i}\} (2-v)^{n-1} v^{n-1} (1-v) dv \end{aligned} \quad (5.3)$$

数値計算により (5.3) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.2140	0.3282	0.4035	0.4579	0.6037	0.7148	0.7657	0.7965	0.8176	0.8706

(5-c) 私的価値分布が1次 B 型のとき

(5.1) 式に (2.3) 式, (2.11) 式および (3.10) 式を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 4 \frac{n-1}{2n-1} na \int_0^{1/2} (2v^2)^n dv + 8 \frac{n-1}{2n-1} na \int_{1/2}^{n_c} v [1 - 2(1-v)^2]^{n-1} (1-v) dv \\ &\quad + \frac{2na}{2n-1} \int_{n_c}^1 [2m_{ci} - \sqrt{4m_{ci}^2 - 2(2n-1)[1 + 4(n-1)v]}] [1 - 2(1-v)^2]^{n-1} (1-v) dv \end{aligned} \quad (5.4)$$

数値計算により (5.4) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.4056	0.5162	0.5756	0.6159	0.7198	0.7983	0.8343	0.8561	0.8710	0.9085

(5-d) 私的価値分布が1次 C 型のとき

(5.1) 式に (2.4) 式, (2.12) 式および (3.13) 式を代入すると次のようになる。

$$\pi_1 = 4n \frac{n-1}{2n-1} \int_0^a v^{2n} dV = 4n \frac{n-1}{2n-1} a \int_0^1 v^{2n} dv = 4n \frac{n-1}{4n^2-1} a \quad (5.5)$$

数値計算により (5.5) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.5333	0.6857	0.7619	0.8081	0.9023	0.9506	0.9669	0.9752	0.9801	0.9900

(5-e) 私的価値分布が2次型のとき

(5.1)式に(2.5)式, (2.13)式および(3.16)式を代入すると次のようになる.

$$\pi_1 = \frac{3na}{2(3n-2)} \int_0^1 \{m_c - \sqrt{m_c^2 - 48(3n-2)(n-1)v}\} \{(3-2v)v^2\}^{n-1} (1-v)v dv \quad (5.6)$$

数値計算により(5.6)式の解を求めると次表のようになる.

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.3869	0.5124	0.5833	0.6306	0.7447	0.8227	0.8565	0.8764	0.8899	0.9229

(5-f) 私的価値分布が3次A型のとき

(5.1)式に(2.6)式, (2.14)式および(3.19)式を代入すると次のようになる.

$$\pi_1 = \frac{8na}{4n-3} \int_0^1 \{m_d - \sqrt{m_d^2 - 9(n-1)(4n-3)v}\} \{(4-3v)v^3\}^{n-1} (1-v)v^2 dv \quad (5.7)$$

数値計算により(5.7)式の解を求めると次表のようになる.

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.5000	0.6176	0.6794	0.7191	0.8108	0.8707	0.8960	0.9108	0.9207	0.9448

(5-g) 私的価値分布が3次B型のとき

(5.1)式に(2.7)式と(2.15)式を代入すると次のようになる.

$$\pi_1 = 12na \int_0^1 b^* \{(6-8v+3v^2)v^2\}^{n-1} (1-v)^2 v dv \quad (5.8)$$

ただし,  $b^*$  は区間  $0 < b_i \leq 1$  での3次方程式  $g_g(b_i) = 0$  の唯一解であり, 解析的には求められないので, 数値計算により求めている. さらに, 数値計算により(5.8)式の解を求めると次表のようになる.

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.3031	0.4074	0.4693	0.5122	0.6228	0.7068	0.7465	0.7712	0.7886	0.8343

(5-h) 私的価値分布が4次型のとき

(5.1)式に(2.8)式, (2.16)式および(3.13)式を代入すると次のようになる.

$$\pi_1 = 30na \int_0^1 b^* \{(10 - 15v + 6v^2)v^3\}^{n-1} (1-v)^2 v^2 dv \quad (5.9)$$

ただし、 $b^*$  は区間  $0 < b_i \leq 1$  での 3 次方程式  $g_n(b_i) = 0$  の唯一解であり、解析的には求められないので、数値計算により求めている。さらに、数値計算により (5.9) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_1/a$	0.4090	0.5132	0.5710	0.6097	0.7051	0.7744	0.8062	0.8258	0.8395	0.8751

すべての場合において、参加者が増加すれば主催者の期待収入も増加し、参加者が 2 名の場合と 100 名の場合を比較したとき、主催者の期待収入は 4 倍を超えることもあり、主催者にとっては参加者の増加が非常に重要な要件となる。

## 6. 競り上げ方式における期待収入

競り上げ方式と第二価格方式の場合、落札額は 2 番目に高い入札額であり、4 節の結果より参加者の最適戦略が  $B = V$  であるので、落札額は 2 番目に高い評価額となる。  $V$  が落札額となるためには、 $n-2$  名の参加者の評価額が  $V$  以下であり、1 名の参加者の評価額が  $V$  以上でなければならない。したがって、 $V$  が落札額となる確率は  $F(V)^{n-2} \{1 - F(V)\}$  となり、1 番高い評価者と 2 番目に高い評価者の組み合わせが  $n(n-1)$  であるので、主催者の期待収入  $\pi_2$  は次のようになる。

$$\pi_2 = n(n-1) \int_0^a VF(V)^{n-2} \{1 - F(V)\} f(V) dV \quad (6.1)$$

### (6-a) 私的価値分布が 0 次型のとき

(6.1) 式に (2.1) 式および (2.9) 式を代入すると次のようになる。

$$\pi_2 = n(n-1) \int_0^a v^{n-1} (1-v) dV = n(n-1)a \int_0^1 (v^{n-1} - v^n) dv = \frac{n-1}{n+1} a \quad (6.2)$$

この結果は、競り下げ方式と第一価格方式の場合 (5-a) の期待収入と一致し、収入同値定理が成立することになる。

### (6-b) 私的価値分布が 1 次 A 型のとき

(6.1) 式に (2.2) 式および (2.10) 式を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 2n(n-1) \int_0^a v \{(2-v)v\}^{n-2} \{1-(2-v)v\}(1-v)dV \\ &= 2n(n-1)a \int_0^1 (2-v)^{n-2} v^{n-1} \{1-(2-v)v\}(1-v)dv\end{aligned}\quad (6.3)$$

数値計算により (6.3) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_2/a$	0.2000	0.3143	0.3905	0.4459	0.5946	0.7082	0.7603	0.7918	0.8134	0.8676

(6-c) 私的価値分布が 1 次 B 型するとき

(6.1) 式に (2.3) 式および (2.11) 式を代入すると次のようになる。

$$\pi_2 = 2n(n-1)a \left[ \int_0^{1/2} (2v^2)^{n-1} (1-2v^2)dv + 4 \int_{1/2}^1 v \{1-2(1-v)^2\}^{n-2} (1-v)^3 dv \right] \quad (6.4)$$

数値計算により (6.4) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_2/a$	0.3836	0.5004	0.5641	0.6065	0.7134	0.7937	0.8305	0.8528	0.8681	0.9064

(6-d) 私的価値分布が 1 次 C 型するとき

(6.1) 式に (2.4) 式および (2.12) 式を代入すると次のようになる。

$$\pi_2 = 2n(n-1) \int_0^a (v^{2n-2} - v^{2n})dV = 2n(n-1)a \int_0^1 (v^{2n-2} - v^{2n})dv = 4na \frac{n-1}{4n^2-1} \quad (6.5)$$

この結果は、競り下げ方式と第一価格方式の場合 (5-d) の期待収入と一致し、収入同値定理が成立することになる。

(6-e) 私的価値分布が 2 次型するとき

(6.1) 式に (2.5) 式および (2.13) 式を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 6n(n-1) \int_0^a v \{(3-2v)v^2\}^{n-2} \{1-(3-2v)v^2\}(1-v)v dV \\ &= 6n(n-1)a \int_0^1 v^2 \{(3-2v)v^2\}^{n-2} \{1-(3-2v)v^2\}(1-v)dv\end{aligned}\quad (6.6)$$

数値計算により (6.6) 式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_2/a$	0.3714	0.5000	0.5728	0.6214	0.7385	0.8185	0.8531	0.8735	0.8873	0.9211

(6-f) 私的価値分布が3次A型するとき

(6.1)式に(2.6)式および(2.14)式を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 12n(n-1) \int_0^a v^3 \{(4-3v)v^3\}^{n-2} \{1-(4-3v)v^3\}(1-v)dV \\ &= 12n(n-1)a \int_0^1 v^3 \{(4-3v)v^3\}^{n-2} \{1-(4-3v)v^3\}(1-v)dv\end{aligned}\quad (6.7)$$

数値計算により(6.7)式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_2/a$	0.4857	0.6072	0.6709	0.7118	0.8061	0.8676	0.8935	0.9087	0.9188	0.9435

(6-g) 私的価値分布が3次B型するとき

(6.1)式に(2.7)式および(2.15)式を代入すると次のようになる。

$$\pi_2 = 12n(n-1) \int_0^1 v \{(6-8v+3v^2)v^2\}^{n-2} \{1-(6-8v+3v^2)v^2\}(1-v)^2 v dv \quad (6.8)$$

数値計算により(6.8)式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_2/a$	0.2857	0.3928	0.4566	0.5007	0.6142	0.7003	0.7410	0.7662	0.7840	0.8307

(6-h) 私的価値分布が4次型するとき

(6.1)式に(2.8)式および(2.16)式を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 30n(n-1) \int_0^a \{(10-15v+6v^2)v^3\}^{n-2} \{1-(10-15v+6v^2)v^3\}(1-v)^2 v^3 dV \\ &= 30n(n-1)a \int_0^1 \{(10-15v+6v^2)v^3\}^{n-2} \{1-(10-15v+6v^2)v^3\}(1-v)^2 v^3 dv\end{aligned}\quad (6.9)$$

数値計算により(6.9)式の解を求めると次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
$\pi_2/a$	0.3918	0.5000	0.5599	0.5999	0.6982	0.7692	0.8019	0.8219	0.8360	0.8724

前節で示した競り下げ方式および第一価格方式の場合と同様に、すべての場合において、参加者が増加すれば主催者の期待収入も増加し、参加者が2名の場合と100名の場合を比較したとき、主催者の期待収入は4倍を超えることもあり、主催者にとっては参加者の増加が非常に重要な要件となる。これらのことから、次の推論が得られる。



推論1 オークションの主催者にとっての期待収入は、参加者数により極めて大きな影響を受け、参加者数が多くなるほど期待収入が増加する。

## 7. 収入同値定理の検証

収入同値定理とは、競り下げ方式、第一価格方式、競り上げ方式および第二価格方式の4つのオークションにおいて、オークション主催者の期待収入が一致するとのものであり、Vickrey (1961) がその提案するモデルにおいて成立することを最初に示したものである。本稿は、この収入同値定理が一般的に成り立つかどうかを検証することを目的としている。

5節および6節の分析から、Vickrey (1961) のモデルと同様に、私的価値分布が0次型と1次C型のときは収入同値定理が成り立つこととなるが、私的価値分布が1次A型、1次B型、2次型、3次A型、3次B型および4次型のときは、収入同値定理が成り立たないとの結果が得られた。すなわち、収入同値定理は私的価値分布が0次型と1次C型のときのみ成り立ち、一般的には成り立たない定理ということになる。

競り下げ方式（および第一価格方式）の場合と競り上げ方式（および第二価格方式）の場合を比較すると1次A型、1次B型、2次型、3次A型、3次B型および4次型のすべての場合において競り下げ方式（および第一価格方式）の期待収入が競り上げ方式（および第二価格方式）の期待収入よりも大きい。このことから次の推論が得られる。

推論2 競り下げ方式（および第一価格方式）の期待収入は、競り上げ方式（および第二価格方式）の期待収入に等しいか大きい<sup>8)</sup>。

しかし、両オークションの期待収入の差は小さく、期待収入の比率（競り下げ方式の期待収入 / 競り上げ方式の期待収入）は次表のようになる。

$n$	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
0次型	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1次A型	1.0700	1.0442	1.0333	1.0269	1.0153	1.0093	1.0071	1.0059	1.0052	1.0035
1次B型	1.0574	1.0316	1.0205	1.0156	1.0090	1.0059	1.0046	1.0039	1.0034	1.0023
1次C型	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2次型	1.0417	1.0248	1.0183	1.0148	1.0084	1.0051	1.0040	1.0033	1.0029	1.0020
3次A型	1.0294	1.0171	1.0127	1.0103	1.0058	1.0036	1.0028	1.0023	1.0021	1.0014
3次B型	1.0608	1.0371	1.0280	1.0231	1.0140	1.0093	1.0075	1.0065	1.0059	1.0043
4次型	1.0439	1.0263	1.0198	1.0164	1.0100	1.0067	1.0054	1.0047	1.0043	1.0031

8) 等しいときは収入同値定理が成り立つ場合であり、私的価値分布が0次型と1次C型の場合を意味する。

上表から、参加者が増加すると、両オークションの期待収入の差が減少することが読み取れる。さらに、最大差は7%であるが、ほぼ5%以内であり、参加者が20名を超える場合は1%以下である。このことから、次の推論が得られる。

**推論3** 競り下げ方式（および第一価格方式）の期待収入と、競り上げ方式（および第二価格方式）の期待収入の差は小さく、参加者が増加するほど差は減少する。参加者が20名を超える場合は、差が1%以下であり有意な差があるとは言い難い。

以上のことから、厳密な意味では収入同値定理は成り立たないが、参加者が少ない場合を除き期待収入の差は小さく、収入同値定理が成り立つと言っても過言ではないと思われる。さらに、推論1と合わせると、オークションの主催者が期待収入の最大化を求めるのであれば、オークションへの参加者を最大化できるであろうオークション方式を模索すべきということになる。

## 8. 結論

本稿は、Vickrey (1961) が提案したオークションに関するモデルを、オークション参加者の当該財に対する私的価値の分布の面において拡張したとき、Vickrey (1961) で成り立つとされた収入同値定理が成り立つかどうかを検証することを目的とした。分析対象とするオークション方法はVickrey (1961) と同様に競り下げ方式、第一価格方式、競り上げ方式、第二価格方式の4種類であり、競り下げ方式と第一価格方式さらに競り上げ方式と第二価格方式がそれぞれ同一のオークション方法であるとの想定の下で分析を行った。

Vickrey (1961) は、私的価値の分布が一様分布である場合を分析したが、本稿においては一様分布に加えて、三角形型分布、2次方程式型分布、3次関数型分布と4次関数型分布の8パターンを想定し、さらに、Vickrey (1961) は分布に関する情報を全参加者が知っているものとしているが、本稿では分布型は全参加者が知っているが分布の上限値を知らないとの一般化を行って分析した。

分析結果は、私的価値の分布が図1に示す一様分布のときと図4に示す1次C型分布の2パターンのときは収入同値定理が成り立つが、その他の6パターンの場合には収入同値定理が成り立たず、競り下げ方式（および第一価格方式）の期待収入が競り上げ方式（および第二価格方式）の期待収入より大きいこととなった。しかし、参加者が増加するとオークション主催者のオークション方法による収入の差が減少すること、参加者数がある程度を越えるとその差が無視できるほど小さくなり、近似的には収入同値定理が成り立つことが明らかになった。

## 参考文献

- [1] 上田晃三 (2010), “オークションの理論と実際：金融市場への応用”, 金融研究, Vol. 29, No. 1, pp. 47-90.
- [2] 神山眞一, 井上守 (2010), “オークションのモデル分析—収入同値定理の検証—”, Discussion Papers in Economics No. 520, Society of Economics, Nagoya City University, Nagoya Japan, p. 12.
- [3] 横尾真 (2006), 『オークション理論の基礎—ゲーム理論と情報科学の先端領域』, 東京電機大学出版局.
- [4] Cramton, P., Y. Shoham and R. Steinberg (2006), *Combinatorial Auctions*, MIT Press.
- [5] Klemperer, P. (ed.) (2000), *The Economic Theory of Auctions*, Edward Elgar.
- [6] Krishna, V. (2002), *Auction Theory*, Academic Press.
- [7] Menezes, F. M. and P. K. Monteiro (2005), *An Introduction to Auction Theory*, Oxford University Press.
- [8] Myerson, R. B. (1981), “Optimal Auction Design,” *Mathematics of Operations Research*, Vol. 6, No. 1, pp. 58-73.
- [9] Riley, J. G. and W. F. Samuelson (1981), “Optimal Auctions,” *American Economic Review*, Vol. 71, No. 3, pp. 381-392.
- [10] Vickrey, W. (1961), “Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders”, *The Journal of Finance*, Vol. 16, No. 1, pp. 8-37.